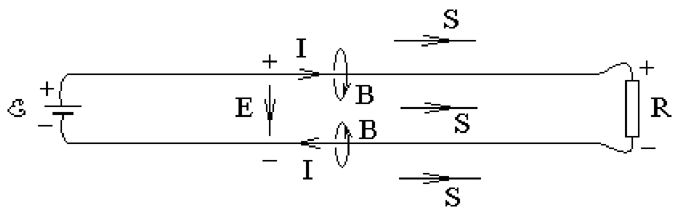
Примеры движения энергии электромагнитного поля (продолжение).

2. Двухпроводная линия.



Энергия распространяется от ЭДС к нагрузке рядом с проводами линии, а не по проводам.

Есть два способа описания одной и той же энергии:

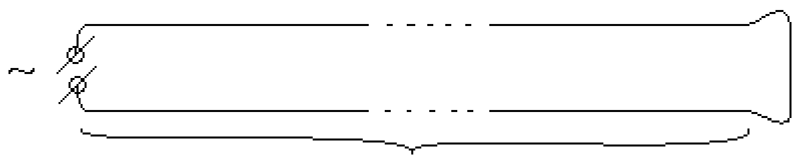
1). Энергия зарядов $W = q\varphi$, которая передается по проводам.

2). Объемная плотность энергии поля $w = \frac{(\vec{D},\vec{E})}{2} + \frac{(\vec{B},\vec{H})}{2}$, которая проходит рядом с проводами.

Энергия зарядов — это потенциальная энергия. Если рассматривать переменные поля, то поле не потенциально. Поэтому у зарядов нет энергии в обычном смысле. Остается только энергия поля.

Энергию зарядов можно рассматривать до тех пор, пока $r << \lambda = \frac{c}{\nu}$, где r — размер электрической схемы λ — длина волны излучения. Так для частоты $\nu = 50\,Гц$ получаем $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{300\,000\left(\frac{км}{c}\right)}{50\left(\frac{1}{c}\right)} = 6000\,км$.

Рассмотрим источник переменного напряжения, в котором потенциалы на контактах изменяются синусоидально в противофазе друг другу. Пусть, для определенности, напряжение изменяется с частотой 50 Гц. Источник напряжения присоединен к длинной двухпроводной линии, а на удаленном конце двухпроводная линия короткозамкнута.



$$L = \frac{\lambda}{4}$$

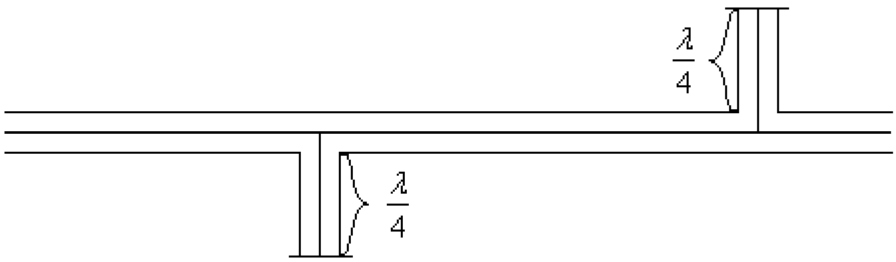
Пусть длина двухпроводной линии $L = \frac{\lambda}{4}$ = 1500 км. В таком случае оказывается, что короткое замыкание на удаленном конце линии будет восприниматься источником напряжения, как разрыв, а не как короткое замыкание.

И действительно. Длина $\frac{\lambda}{4}$ эквивалентна сдвигу фаз $\frac{\pi}{2}$. Пусть в какой-то момент времени потенциал верхней клеммы источника максимален. На правом конце линии распространяющийся потенциал отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а доходя до нижней клеммы отстает еще на $\frac{\pi}{2}$. В сумме отставание фазы на π, что означает, что сигнал от верхней клеммы приходит к нижней клемме в противоположной фазе. То есть, когда на верхней клемме максимальный потенциал, к нижней клемме только доходит предыдущее минимальное значение потенциала. В этот же момент времени источник напряжения подает на нижнюю клемму минимальный потенциал, тот же, что и пришедший по двухпроводной линии. Следовательно, ток от источника не течет.

В этом смысле источник напряжения воспринимает короткое замыкание на удаленном конце линии, как разрыв.

В радиолокационных станциях старого типа используется излучение с длиной волны $\lambda = (10 \div 100)\,см$. Сигнал от генератора к антенне передается по жесткому коаксиальному кабелю, который состоит из центрального провода и цилиндрической проводящей оболочки (экрана) вокруг него. Для гибкого коаксиального кабеля оболочку называют оплеткой. К антенне от генератора подается большая мощность. При этом любой диэлектрик в пространстве между центральной жилой и цилиндрическим экраном не выдерживает разогрева. Если же пространство между центральной жилой и экраном оставить пустым, то непонятно, как удержать центральную жилу по центру экрана.

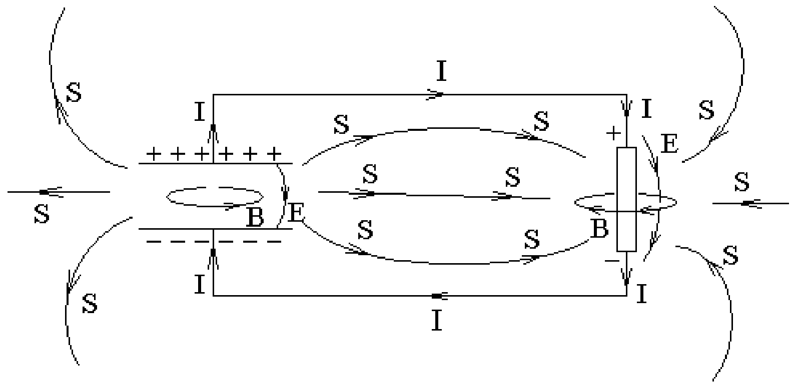
Решение проблемы было найдено в виде четвертьволнового стакана.



Конец четвертьволнового стакана является коротким замыканием, а сам стакан воспринимается сигналом центральной жилы, как разрыв, а не как короткое замыкание. По ходу распространения сигнала таких стаканов может быть несколько. В настоящее время четвертьволновым стаканом называют несколько иную конструкцию, а то, что рассмотрели мы, называют четвертьволновым штырем.

<u>3). Разряд конденсатора через сопротивление.</u>

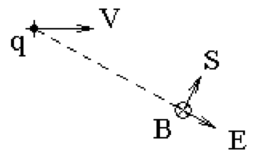
Энергия вытекает из плоского конденсатора через щели между пластинами.

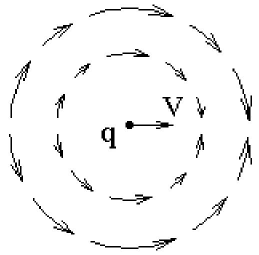


4). Равномерно и прямолинейно движущийся заряд.

В нерелятивистском приближении энергия перетекает по полуокружностям, обегая вокруг заряда в направлении его движения.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\left[\vec{V}, \vec{r}\right]}{r^3} \qquad \vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{B}\right]$$





Электрические цепи переменного тока.

Связь тока и напряжения для линейных элементов цепи переменного тока.

Для резистора:

$U = RI$

Для конденсатора:

$$\begin{cases} C \equiv \dfrac{q}{U} \\ I \equiv \dfrac{dq}{dt} \end{cases} \quad =>$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(t') \cdot dt'$$

Для катушки индуктивности:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = LI \end{cases} \quad => \quad \mathcal{E}_{инд} = -L\dot{I}, \qquad \text{где } \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt}.$$

Рассмотрим закон Ома для участка цепи с учетом ЭДС

$U + \mathcal{E} = RI$.

Пусть сопротивление участка цепи стремится к нулю $R \to 0$, тогда

$U = -\mathcal{E}$.

То есть согласно принятым правилам знаков напряжение, падающее на ЭДС, отличается знаком от величины самой ЭДС. Аналогично для катушки индуктивности:

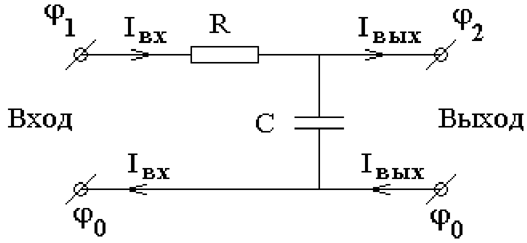
$U_L = -\mathcal{E}_{инд}$.

Тогда связь тока и напряжения для линейных элементов цепи имеет вид:

$$\begin{cases} U_R = RI \\ U_C = \dfrac{1}{C}q = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t I(t')\,dt' \\ U_L = L\dot{I} \end{cases}$$

Интегрирующая RC-цепочка.

Пусть напряжение $U_{вх}(t)$ подается на последовательно включенные резистор и конденсатор, а снимается с конденсатора напряжение $U_{вых}(t)$.



Факультативная вставка.

Если бы выходной ток различался в верхнем и нижнем проводе, то заряды тока должны были бы накапливаться где-то справа от схемы на проводнике, у которого большая емкость относительно бесконечности. Кроме того, вся схема имеет малую емкость уединенного проводника, и на ней не может накапливаться заряд. Следовательно, если различаются выходные токи на верхнем и нижнем проводе, то также обязаны различаться и входные токи на верхнем и нижнем проводе. В результате и слева от схемы тоже должен был бы быть проводник с большой емкостью относительно бесконечности.

Конец факультативной вставки.

Обычно, если не оговорено обратное, подразумевается, что к выходу схемы ничего не подключено и поэтому выходной ток схемы равен нулю $I_{вых} = 0$.

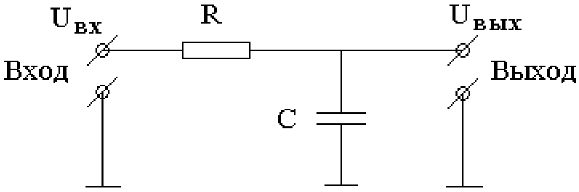
$U_{вх} = \varphi_1 - \varphi_0$

$U_{вых} = \varphi_2 - \varphi_0$

Нижний провод схемы — общий провод для входа и выхода.

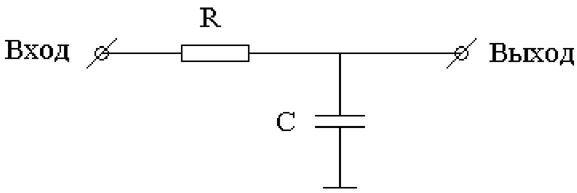
Общий провод схемы, относительно которого отсчитывают потенциалы всех остальных точек схемы, обычно обозначают знаком $\perp$.

Тогда схему можно перерисовать в виде:

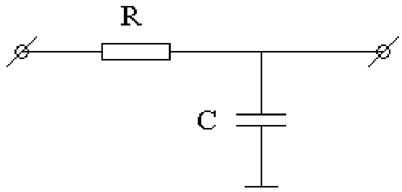


Надписи $U_{вх}$ и $U_{вых}$ можно не делать, так как обычно подразумевается, что напряжение подается на верхнюю клемму пары входных клемм и снимается тоже с верхней клеммы пары выходных клемм.

Общий провод на входе и выходе схемы обычно не рисуют, он подразумевается. Тогда



Обычно подразумевается, что вход схемы находится слева, а выход — справа. Тогда



Пусть напряжение на входе схемы $U_{вх}(t)$ — любая функция времени и пусть в любой момент времени выполняется условие $\left|U_{вых}(t)\right| << \left|U_{вх}(t)\right|$.

Входное напряжение схемы $U_{вх}(t)$ можно рассматривать, как внешнюю ЭДС. Тогда уравнение Кирхгофа для контура примет вид

$$U_{вх}(t) = R\,I(t) + \frac{q(t)}{C}.$$

Для краткости не будем писать аргумент в виде времени

$$U_{вх} = RI + \frac{q}{C}.$$

Слагаемое $\frac{q}{C}$ — это напряжение на выходе схемы, которое по условию мало. Следовательно,

$$U_{вх} \approx RI \quad => \quad I \approx \frac{U_{вх}}{R} \quad =>$$

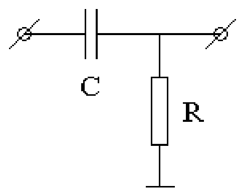
$$q(t) = \int_0^t I(t')\,dt' \approx \int_0^t \frac{U_{вх}(t')}{R}\,dt' = \frac{1}{R}\int_0^t U_{вх}(t')\,dt'.$$

$$U_{вых} = \frac{q}{C} \quad =>$$

$$U_{вых}(t) \approx \frac{1}{RC}\int_0^t U_{вх}(t')\cdot dt' \text{ при условии } |U_{вых}(t)| << |U_{вх}(t)|.$$

Для хорошего интегрирования достаточно чтобы произведение RC было велико по сравнению со временем интегрирования.

Дифференцирующая RC-цепочка.



Пусть напряжение $U_{вх}(t)$ на входе схемы — любая функция времени. Входное напряжение подается на последовательно включенные конденсатор C и резистор R, а с резистора снимается напряжение $U_{вых}(t)$. И пусть в любой момент времени выполнено условие $|U_{вых}(t)| << |U_{вх}(t)|$. Подразумевается, что ток на выходе схемы равен нулю, то есть к выходу ничего не подключено.

Входное напряжение схемы $U_{вх}(t)$ можно рассматривать, как внешнюю ЭДС. Тогда уравнение Кирхгофа для контура примет вид

$U_{вх} = \frac{q}{C} + RI$, что справедливо в любой момент времени. Второе слагаемое — это напряжение на выходе схемы, и оно очень мало. Тогда

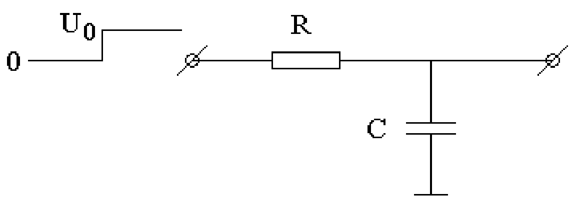
$$U_{вх} \approx \frac{q}{C} \quad => \quad q \approx CU_{вх} \quad => \quad I = \dot{q} \approx C\dot{U}_{вх} \quad =>$$

$$U_{вых} = RI \approx RC\dot{U}_{вх} \quad =>$$

$$U_{вых} \approx RC\frac{dU_{вх}}{dt} \text{ при условии } |U_{вых}(t)| << |U_{вх}(t)|.$$

Для хорошего дифференцирования достаточно, чтобы время RC было мало, так чтобы $U_{вх}$ не успевало заметно измениться за время RC.

Реакция *RC*-цепочки на ступеньку напряжения.



Пусть резистор и конденсатор включены последовательно. На эту схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения величиной U_0. Нужно найти напряжение на конденсаторе, как функцию времени.

Та же самая схема была рассмотрена в вопросе "Интегрирующая RC-цепочка", но в том вопросе было дополнительное условие $\left|U_{вых}(t)\right| << \left|U_{вх}(t)\right|$, которое в данном вопросе не выполнено. Зато теперь вместо произвольной функции времени на входе схемы рассматривается только ступенька напряжения.

Напомним уравнения Кирхгофа.

1). $\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i U_i$ — для любого контура.

2). $\sum_i I_i = 0$ — для любого узла.

Рассмотрим уравнение $\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i U_i$ для единственного контура. Напряжение на входе можно рассматривать, как внешнюю ЭДС.

После включения ступеньки напряжения выполнено условие: $U_0 = RI + \frac{q}{C}$, которое можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно заряда q на конденсаторе с учетом того, что $I = \dot{q}$

$$U_0 = R\dot{q} + \frac{q}{C} \qquad =>$$

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R}$$

Общее решение этого неоднородного уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде константы.

$$q = const \quad => \quad \dot{q} = 0 \quad => \quad \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R} \quad => \quad q = CU_0$$ —

частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем теперь общее решение однородного уравнения

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0.$$

<u>Факультативная математическая вставка</u>.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t}$, A_i — произвольные константы интегрирования, λ_i — решения характеристического уравнения, которое получается при подстановке в уравнение решения в виде $y = Ae^{\lambda t}$.

Подставим и после сокращения каждого слагаемого на $Ae^{\lambda t}$ получим:

$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ — характеристическое уравнение.

Конец факультативной вставки.

В нашем случае в уравнение $\dot{q} + \frac{1}{RC} q = 0$ подставим $q = Ae^{\lambda t}$ и получим

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{\lambda t}\right) + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\lambda t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \frac{1}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC} q = 0$ имеет вид

$$q = Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

Общее решение неоднородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC} q = \frac{U_0}{R}$ имеет вид суммы частного решения неоднородного уравнения $q = CU_0$ и общего решения $q = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ однородного уравнения

$$q = CU_0 + Ae^{-\frac{t}{RC}},$$

здесь A — произвольная константа интегрирования.

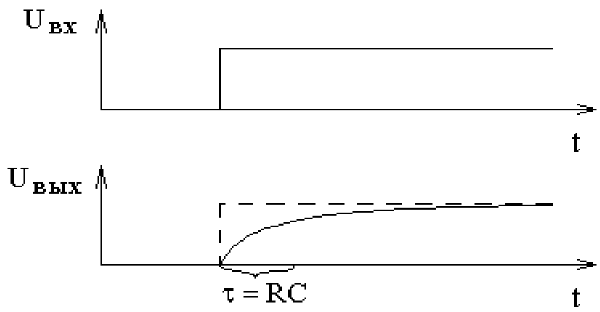
Найдем константу A из условия $U_C(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q(0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$0 = CU_0 + Ae^{-\frac{0}{RC}} \quad \Rightarrow \quad A = -CU_0 \quad \Rightarrow$$

$$q = CU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow$$

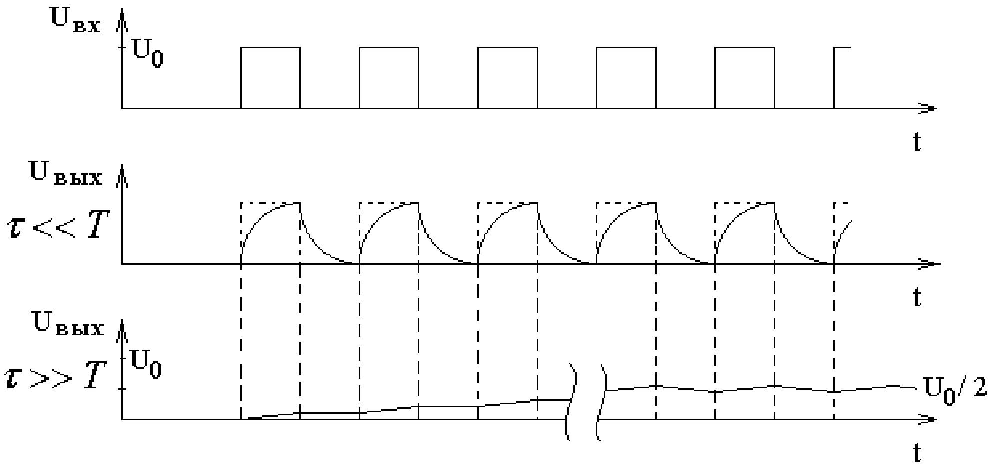
$$U_{вых} = \frac{q}{C} = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

где произведение $RC = \tau$ называют постоянной времени RC-цепочки.



Факультативная вставка.

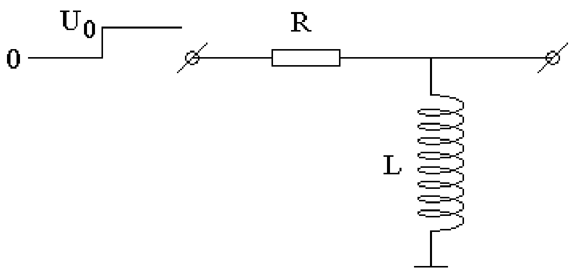
Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов с коэффициентом заполнения $\frac{1}{2}$ (со скважностью 2, где скважность — это отношение периода к длительности положительного импульса), то



Здесь T — период прямоугольников, $\tau = RC$ — постоянная времени RC-цепочки.

Конец факультативной вставки.

Реакция RL-цепочки на ступеньку напряжения.



Пусть резистор и катушка индуктивности включены последовательно. На эту схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения величиной U_0. Нужно найти напряжение на катушке индуктивности, как функцию времени.

Рассмотрим уравнение $\sum_i \mathscr{E}_i = \sum_i U_i$ для единственного контура. Напряжение на входе можно рассматривать, как внешнюю ЭДС.

После включения ступеньки напряжения $U_0 = RI + L\dot{I}$ =>

$\dot{I} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L}$ — неоднородное дифференциальное уравнение для тока.

Ищем его частное решение в виде константы $I = const$ => $\dot{I} = 0$ =>
$\frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L}$ => $I = \frac{U_0}{R}$ — частое решение неоднородного уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение:

$\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$.

Ищем его решение в виде $I = Ae^{\lambda t}$. Подставим его в уравнение $\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$ и получим характеристическое уравнение

$\lambda + \frac{R}{L} = 0$ => $\lambda = -\frac{R}{L}$ =>

$I = Ae^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение однородного уравнения. Тогда

$I = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение неоднородного уравнения.

Произвольную константу интегрирования A находим из условия $I_L(0) = 0$

=> $0 = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}\cdot 0}$ => $A = -\frac{U_0}{R}$ =>

$I = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ =>