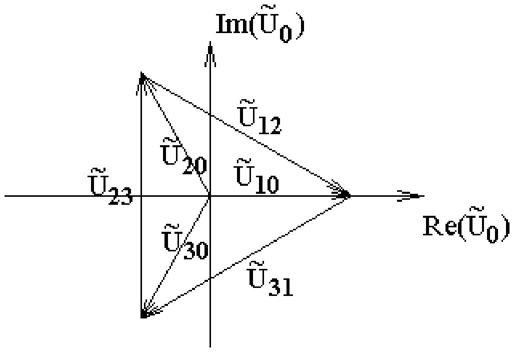
Трехфазное напряжение.

Трехфазное напряжение обычно выводится на специальный трехфазный электрический щит с четырьмя клеммами. На три клеммы подается напряжение трех фаз относительно общего провода, который подключен к четвертой клемме. Где-то далеко от щита нулевой провод соединен с землей, то есть заземлен.

Напряжение каждой из трех фаз имеет одинаковую амплитуду, но эти напряжения сдвинуты по фазе на угол $\frac{2\pi}{3}$ друг относительно друга. На следующем рисунке изображена плоскость комплексных амплитуд.



Здесь три вектора из начала координат — это комплексные амплитуды трех фаз. Эти векторы развернуты друг относительно друга на углы $\frac{2\pi}{3}$. Концы этих трех векторов связаны еще тремя векторами — комплексными амплитудами напряжений между фазами.

Из рисунка видно, что амплитуда напряжения между фазами $\left|\tilde{U}_{23}\right|$, $\left|\tilde{U}_{12}\right|$, $\left|\tilde{U}_{31}\right|$ в $\sqrt{3}$ больше, чем амплитуда напряжения одной фазы $\left|\tilde{U}_{10}\right|$, $\left|\tilde{U}_{20}\right|$, $\left|\tilde{U}_{30}\right|$.

Подключаясь к клеммам трехфазного электрического щитка можно использовать всё трехфазное напряжение или напряжение между двумя фазами (между клеммами двух фаз) или напряжение одной фазы (между клеммой фазы и клеммой общего провода).

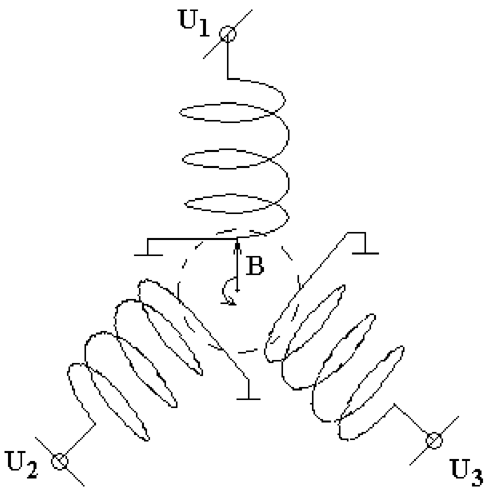
Для бытовой трехфазной сети переменного тока есть два стандарта.

1). Сеть 220/127 Вольт. Это сеть с эффективным напряжением 127 Вольт каждой фазы относительно нулевого провода. Эффективное напряжение между фазами —220 Вольт. Бытовые приборы в такой сети включаются между двумя фазами.

2). Сеть 380/220 Вольт. В этой сети эффективное напряжение каждой фазы — 220 Вольт, напряжение между фазами — 380 Вольт. Бытовые приборы включаются между фазой и нулевым проводом.

Асинхронный трехфазный электродвигатель.

Двигатель имеет три неподвижных статорных обмотки, на которые подают три фазы трехфазного напряжения.



В пунктирной области между обмотками образуется вращающееся магнитное поле $\vec{B}$, так как магнитное поле достигает максимального значения сначала в одной обмотке, затем во второй, затем в третьей.

В эту область вращающегося магнитного поля помещают ротор электродвигателя. Ротор вращается так, что ось вращения ротора перпендикулярна плоскости рисунка.

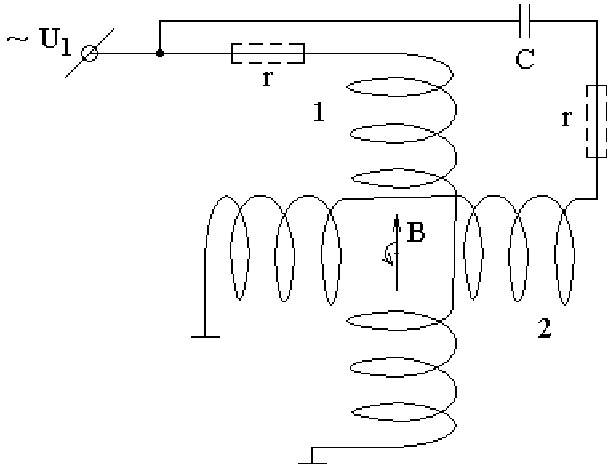
На роторе электродвигателя закреплена короткозамкнутая роторная обмотка.

Для простоты будем считать, что роторная обмотка — это один виток провода. Виток ротора расположен перпендикулярно плоскости рисунка, и ось его вращения тоже расположена перпендикулярно плоскости рисунка, так что ось вращения ротора лежит в плоскости его витка.

В области ротора вращается магнитное поле, создаваемое статорными обмотками. Виток ротора стремится поворачиваться за магнитным полем, чтобы сохранять неизменной величину потока магнитного поля $\vec{B}$ через рамку обмотки. Это происходит по правилу Ленца, согласно которому ток индукции в роторной обмотке имеет такое направление, что силы Ампера, действующие на ток индукции, стремятся устранить причину возникновения тока индукции — изменение магнитного потока через рамку роторной обмотки.

Электродвигатель, совершая полезную работу, вращает вал с некоторым усилием. Вращаясь под механической нагрузкой, ротор понемногу отстает от магнитного поля, поэтому двигатель называется асинхронным.

Однофазный электродвигатель.



Роторная обмотка короткозамкнутая.

Одну из двух статорных обмоток электродвигателя подключают непосредственно к фазе, а вторую — через конденсатор. Конденсатор сдвигает фазу тока второй статорной обмотки относительно фазы тока первой обмотки. Лучше всего было бы сдвинуть фазу на $\frac{\pi}{2}$.

На практике сдвиг фаз отличен от $\frac{\pi}{2}$, поэтому вращающееся магнитное поле не совсем постоянно по амплитуде. Однофазный электродвигатель создает меньший момент сил, чем трехфазный электродвигатель.

<u>Комплексное сопротивление — импеданс.</u>

Импеданс или комплексное сопротивление по определению равно отношению комплексного напряжения к комплексному току:

$$\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}.$$

Заметим, что импеданс также равен отношению комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{\tilde{U}_0 e^{i\omega t}}{\tilde{I}_0 e^{i\omega t}} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}$$

Найдем импеданс для каждого элемента линейной схемы: для резистора, конденсатора и катушки индуктивности.

Для резистора:

$$U = RI \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{U} = R\tilde{I} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{Z}_R = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = R.$$

Для конденсатора:

$$q = CU \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q} = I = C\dot{U} \qquad \Rightarrow$$

$$\tilde{I} = C\dot{\tilde{U}} = C\frac{d}{dt}\left(\tilde{U}_0 e^{i\omega t}\right) = C\tilde{U}_0 \frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right) = i\omega C\tilde{U}_0 e^{i\omega t} = i\omega C\tilde{U} \qquad \Rightarrow$$

$$\widetilde{U}=\frac{1}{i\omega C}\tilde{I} \qquad => \qquad \widetilde{Z}_C=\frac{1}{i\omega C}.$$

Для катушки индуктивности:

$$U=L\dot{I} \qquad =>$$

$$\widetilde{U}=L\dot{\tilde{I}}=L\frac{d}{dt}\left(\tilde{I}_0 e^{i\omega t}\right)=L\tilde{I}_0\frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right)=i\omega L\tilde{I}_0 e^{i\omega t}=i\omega L\tilde{I} \qquad =>$$

$$\widetilde{Z}_L=i\omega L.$$

Соберем вместе все три выражения для импедансов и получим:

$$\begin{cases}\widetilde{Z}_R=R\\ \widetilde{Z}_C=\dfrac{1}{i\omega C}\\ \widetilde{Z}_L=i\omega L\end{cases}.$$

Комплексные сопротивления вместе с комплексными напряжениями и комплексными токами позволяют вместо дифференциальных уравнений Кирхгофа составлять комплексные уравнения Кирхгофа для токов.

<u>Факультативная вставка</u>.

По ходу рассмотрения этого вопроса мы из соотношений для вещественных величин написали аналогичные соотношения для комплексных величин, например из соотношения $U=L\dot{I}$ мы получили $\widetilde{U}=L\dot{\tilde{I}}$. Возникает вопрос. Почему это можно сделать?

Из вещественного равенства $U=L\dot{I}$ следует комплексное равенство $\widetilde{U}=\widetilde{\left(L\dot{I}\right)}$. В правой части равенства константу L можно вынести за скобки. Тогда $\widetilde{U}=L\tilde{\dot{I}}$. Теперь чтобы доказать, что $\widetilde{U}=L\dot{\tilde{I}}$, нам осталось доказать, что $\tilde{\dot{I}}=\dot{\tilde{I}}$.

Рассмотрим левую часть равенства $\tilde{\dot{I}}=\dot{\tilde{I}}$:

$$I=I_0\cos\left(\omega t+\psi_0\right) \qquad => \qquad \dot{I}=-\omega I_0\sin\left(\omega t+\psi_0\right)=\omega I_0\cos\left(\omega t+\psi_0+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=> \qquad \tilde{\dot{I}}=\omega I_0 e^{i\left(\omega t+\psi_0+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Рассмотрим теперь правую часть равенства $\tilde{\dot{I}}=\dot{\tilde{I}}$:

$$I=I_0\cos\left(\omega t+\psi_0\right) \qquad => \qquad \tilde{I}=I_0 e^{i\left(\omega t+\psi_0\right)} \qquad =>$$

$$\dot{\tilde{I}}=i\omega I_0 e^{i\left(\omega t+\psi_0\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\omega I_0 e^{i\left(\omega t+\psi_0\right)}=\omega I_0 e^{i\left(\omega t+\psi_0+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Таким образом, мы получили одинаковое выражение для правой и левой частей равенства $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$, следовательно, равенство доказано.

<u>Конец факультативной вставки</u>.

Резонанс напряжений.

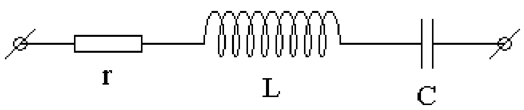
Резонанс — это явление, в котором полезный сигнал, как функция частоты, имеет острый пик. В нашем случае — амплитуда вынужденных колебаний, как функция частоты приложенного электрического напряжения.

Резонанс напряжений наблюдается в последовательном колебательном контуре.

Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Колебательный контур может быть последовательным или параллельным. В обоих случаях колебательный контур — это двухполюсник, из которого выходят два провода.

В последовательном колебательном контуре катушка индуктивности и конденсатор включены последовательно между клеммами двухполюсника, в параллельном контуре — параллельно.

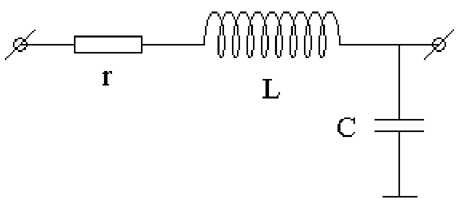
Последовательный колебательный контур имеет следующий вид:



.

Катушка индуктивности обычно имеет заметное внутреннее сопротивление. Будем рассматривать реальную катушку индуктивности, как последовательно включенные резистор с сопротивлением r и идеальную катушку индуктивности L с нулевым сопротивлением.

Будем считать, что напряжение на входе схемы — это напряжение на всем колебательном контуре, а напряжение на выходе схемы — это напряжение на конденсаторе. Тогда



Амплитуда напряжения на выходе схемы в резонансе много больше, чем амплитуда напряжения на входе схемы. В резонансе напряжение на конденсаторе и напряжение на катушке индуктивности становятся очень большими (при малом значении r), но эти два напряжения изменяются в противофазе, поэтому напряжение на всем колебательном контуре гораздо меньше каждого из них.

Рассмотрим задачу количественно.

Как и обычно будем считать, что выход схемы не потребляет тока. Тогда напишем уравнение Кирхгофа для контура в комплексном виде.

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i U_i \qquad => \qquad \widetilde{U}_{вх} = r\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} \qquad =>$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}}\widetilde{U}_{вх} \qquad =>$$

$$\widetilde{U}_{вых} = \widetilde{U}_C = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}}\widetilde{U}_{вх} \qquad =>$$

$$\widetilde{U}_{вых} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}}\widetilde{U}_{вх}.$$

По определению комплексный коэффициент передачи по напряжению равен отношению комплексных напряжений на выходе и на входе схемы:

$$\widetilde{K}_U \equiv \frac{\widetilde{U}_{вых}}{\widetilde{U}_{вх}} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}}.$$

Заметим, что комплексный коэффициент передачи равен отношению комплексных амплитуд на выходе и на входе схемы:

$$\widetilde{K}_U \equiv \frac{\widetilde{U}_{вых}}{\widetilde{U}_{вх}} = \frac{\widetilde{U}_{0\_вых}\, e^{i\omega t}}{\widetilde{U}_{0\_вх}\, e^{i\omega t}} = \frac{\widetilde{U}_{0\_вых}}{\widetilde{U}_{0\_вх}}.$$

По определению вещественный коэффициент передачи по напряжению равен отношению вещественных амплитуд на выходе и на входе схемы, его также называют амплитудным коэффициентом передачи или коэффициентом передачи по амплитуде:

$$K_U \equiv \frac{U_{0\_вых}}{U_{0\_вх}}.$$

Вещественный коэффициент передачи по напряжению равен модулю комплексного коэффициента передачи:

$$\left|\widetilde{K}_U\right| = \left|\frac{\widetilde{U}_{вых}}{\widetilde{U}_{вх}}\right| = \left|\frac{\widetilde{U}_{0\_вых}\, e^{i\omega t}}{\widetilde{U}_{0\_вх}\, e^{i\omega t}}\right| = \left|\frac{\widetilde{U}_{0\_вых}}{\widetilde{U}_{0\_вх}}\right| = \frac{\left|\widetilde{U}_{0\_вых}\right|}{\left|\widetilde{U}_{0\_вх}\right|} = \frac{U_{0\_вых}}{U_{0\_вх}} = K_U \qquad =>$$

$$K_U = \left|\widetilde{K}_U\right| = \left|\frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}}\right| = \frac{\left|\dfrac{1}{i\omega C}\right|}{\left|r + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\right|} = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad =>$$

$$K_U = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Знаменатель минимален на частоте ω_0, такой что $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ =>

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — эта частота называется резонансной частотой колебательного контура.

Заметим, что максимум вещественного коэффициента передачи достигается на близкой, но несколько отличающейся частоте, так как минимум знаменателя $\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ не совпадает с максимумом дроби

$$K_U = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Разница в этих частотах мала, если $r << \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Величину $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ называют волновым сопротивлением колебательного контура.

Найдем величину вещественного коэффициента передачи на резонансной частоте колебательного контура ω_0:

$$K_U(\omega_0) = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}}.$$

С учетом того, что на резонансной частоте $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$, получим

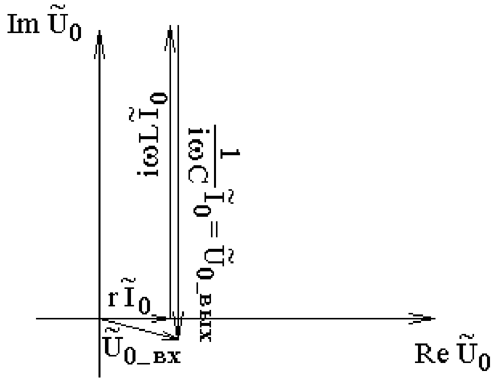
$$K_U(\omega_0) = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r} = \frac{\frac{\sqrt{LC}}{C}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} = \frac{\rho}{r}$$

$K_U(\omega_0) = \frac{\rho}{r}$, где $\rho \equiv \sqrt{\frac{L}{C}}$ — волновое сопротивление колебательного контура.

Если $r << \rho$, то $K_U \equiv \dfrac{U_{0\_вых}}{U_{0\_вх}} = \dfrac{\rho}{r} >> 1$ и $U_{0\_вых} >> U_{0\_вх}$ — на резонансной частоте напряжение на выходе схемы гораздо больше, чем на входе. Ширина резонанса на половине высоты $\Delta\omega \approx \sqrt{3}\dfrac{r^2}{\rho^2}\omega_0$ (без доказательства, факультативно).

Диаграмма на комплексной плоскости амплитуд позволяет наглядно объяснить, как это возможно.

Выбором нулевого момента отсчета времени мы можем изменять начальную фазу колебаний и поворачивать все комплексные амплитуды на один и тот же угол на комплексной плоскости. Выберем нулевой момент времени так, чтобы направление комплексной амплитуды тока $\tilde{I}_0$ совпадало с направлением вещественной оси.



Напряжения на всех элементах схемы пропорциональны комплексной амплитуде тока, но коэффициенты пропорциональности комплексные, поэтому комплексные амплитуды напряжений по-разному направлены на комплексной плоскости.

Комплексная амплитуда напряжения на резисторе r равна $r\tilde{I}_0$ и направлена, как и комплексная амплитуда тока $\tilde{I}_0$ вдоль вещественной оси.

Комплексная амплитуда напряжения на индуктивности $i\omega L\tilde{I}_0$ равна произведению двух комплексных чисел $\tilde{I}_0$ и $i\omega L$. Фаза комплексного числа равна углу поворота соответствующего ему вектора относительно вещественной оси. Для сомножителя $\tilde{I}_0$ этот угол равен нулю, а для сомножителя $i\omega L$ равен $\dfrac{\pi}{2}$. При перемножении комплексных чисел их фазы складываются, поэтому фаза произведения $i\omega L\tilde{I}_0$ равна $\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, эта комплексная амплитуда направлена вертикально вверх на комплексной плоскости.

Комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе $\frac{1}{i\omega C}\tilde{I}_0 = \widetilde{U}_{0\_вых}$ имеет такую же фазу, как и $\frac{1}{i} = -i$. Фаза равна $-\frac{\pi}{2}$ и комплексная амплитуда $\frac{1}{i\omega C}\tilde{I}_0$ направлена вертикально вниз.

Сумма комплексных амплитуд на трех элементах схемы: резисторе, катушке индуктивности и конденсаторе равна комплексной амплитуде суммарного напряжения, то есть напряжения на входе схемы $\widetilde{U}_{0\_вх}$.

Из рисунка видно, что модули комплексных амплитуд на катушке индуктивности и на конденсаторе могут быть гораздо больше модуля комплексной амплитуды входного напряжения, так как напряжения на катушке индуктивности и на конденсаторе противофазны и вычитаются друг из друга.

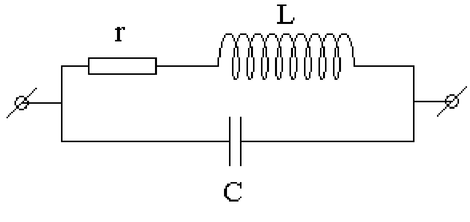
На комплексной плоскости напряжений, а не амплитуд, вся эта картина сложения амплитуд вращается с угловой скоростью ω против часовой стрелки. В каждый момент времени проекция каждого из векторов на вещественную ось равна мгновенному значению напряжения на соответствующем элементе схемы.

Заметим, что сопротивление последовательного контура $Z = r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$ на резонансной частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ может быть очень мало $Z = r$ по сравнению с сопротивлением $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ колебательного контура на частотах заметно отличающихся от резонансной частоты ω_0. Это часто используется в схемах, где нужно пропустить сигнал на резонансной частоте и задержать (не пропустить) сигнал на остальных частотах.

<u>**Резонанс токов.**</u>

Резонанс токов наблюдается в параллельном колебательном контуре.

Параллельный колебательный контур — это двухполюсник, внутри которого катушка индуктивности и конденсатор соединены параллельно.

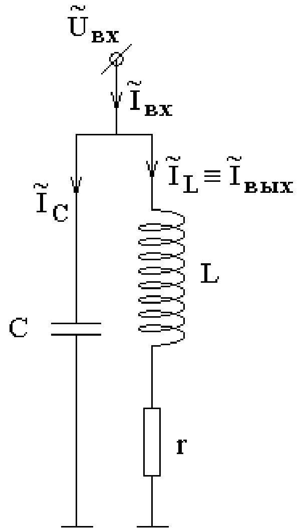


Резонанс токов состоит в том, что амплитуда кругового тока внутри колебательного контура имеет узкий пик в зависимости от частоты тока при неизменной амплитуде тока через клеммы подключения контура.

В данном случае будем называть током на входе схемы ток, который протекает через каждую клемму двухполюсника, а током на выходе схемы — круговой ток внутри LC-контура. Для выходного тока катушка индуктивности и конденсатор включены последовательно и это их общий ток. Входной ток схемы тоже как-то протекает через эти же элементы схемы, поэтому силы тока через конденсатор и катушку индуктивности несколько отличаются друг от друга.

Нам будет удобнее считать, что выходной ток схемы — это ток, протекающий через катушку индуктивности. При таком выборе формулы для резонанса токов будут очень похожи на формулы резонанса напряжений.

Обычно один полюс двухполюсника параллельного колебательного контура является общим проводом схемы. Рассмотрим именно такой вариант.



Входной ток $\tilde{I}_{вх}$ разветвляется на ток конденсатора $\tilde{I}_C$ и ток катушки индуктивности $\tilde{I}_L$. Тогда уравнение Кирхгофа для узла примет следующий вид:

$$\sum_i I_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{I}_{вх} = \tilde{I}_C + \tilde{I}_L$$

Силу тока через конденсатор и катушку индуктивности можно выразить через комплексное напряжение и комплексное сопротивление. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{I}_C = \dfrac{\tilde{U}_{вх}}{\tilde{Z}_C} \\ \tilde{I}_L = \dfrac{\tilde{U}_{вх}}{\tilde{Z}_L + r} \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\tilde{I}_{вх} = \tilde{I}_C + \tilde{I}_L = \frac{\tilde{U}_{вх}}{\tilde{Z}_C} + \frac{\tilde{U}_{вх}}{\tilde{Z}_L + r} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{\dfrac{1}{i\omega C}} + \frac{\tilde{U}_{вх}}{i\omega L + r} = \tilde{U}_{вх}\left(i\omega C + \frac{1}{r + i\omega L} \right).$$

Сравним этот входной ток с током на выходе (током индуктивности):

$$\tilde{I}_{вых} = \tilde{I}_L = \frac{\tilde{U}_{вх}}{\tilde{Z}_L + r} = \frac{\tilde{U}_{вх}}{r + i\omega L}.$$

$\tilde{K}_I \equiv \dfrac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}}$ — комплексный коэффициент передачи по току.

$$\widetilde{K}_I \equiv \frac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}} = \frac{\dfrac{\widetilde{U}_{вх}}{r+i\omega L}}{\widetilde{U}_{вх}\left(i\omega C + \dfrac{1}{r+i\omega L}\right)} = \frac{\dfrac{1}{r+i\omega L}}{i\omega C + \dfrac{1}{r+i\omega L}} =$$

$$= \frac{1}{i\omega C\left(r+i\omega L\right)+1} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}} \qquad =>$$

$$\widetilde{K}_I = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}}$$

Это выражение полностью совпадает с выражением для комплексного коэффициента передачи по напряжению в вопросе "Резонанс напряжений". Поэтому все дальнейшие формулы будут аналогичны в этих двух вопросах.

$K_I \equiv \dfrac{I_{0\_вых}}{I_{0\_вх}}$ — вещественный коэффициент передачи по току.

Вещественный коэффициент передачи по току равен модулю комплексного коэффициента передачи по току. И действительно:

$$\left|\widetilde{K}_I\right| \equiv \left|\frac{\tilde{I}_{вых}}{\tilde{I}_{вх}}\right| = \left|\frac{\tilde{I}_{0\_вых}\, e^{i\omega t}}{\tilde{I}_{0\_вх}\, e^{i\omega t}}\right| = \left|\frac{\tilde{I}_{0\_вых}}{\tilde{I}_{0\_вх}}\right| = \frac{I_{0\_вых}}{I_{0\_вх}} = K_I$$

Тогда

$$K_I = \left|\widetilde{K}_I\right| = \left|\frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}}\right| = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Знаменатель дроби минимален при условии $\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0$ =>

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — резонансная частота параллельного колебательного контура, такая же, как и для последовательного колебательного контура.

$K_I\left(\omega_0\right) = \dfrac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{r} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{LC}}{C}}{r} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{L}{C}}}{r} = \dfrac{\rho}{r}$, где $\rho \equiv \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ — волновое сопротивление колебательного контура.

При условии $\rho >> r$ получаем, что $K_I >> 1$ или $I_{0\_вых} >> I_{0\_вх}$ — это и есть резонанс токов.

Заметим, что сопротивление параллельного контура

$$Z=\frac{Z_C\left(Z_L+r\right)}{Z_C+\left(Z_L+r\right)}=\frac{\frac{1}{i\omega C}\left(i\omega L+r\right)}{r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}}=\frac{\frac{L}{C}+\frac{r}{i\omega C}}{r+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

на резонансной частоте $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ очень велико и равно $Z\left(\omega_0\right)=\frac{\rho^2}{r}-i\rho\approx\frac{\rho^2}{r}$, где $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$. Большое сопротивление параллельного контура на резонансной частоте часто используется в схемах, где нужно задержать (не пропустить) сигнал на резонансной частоте и пропустить сигнал на остальных частотах.

Напряжение на выходе линейной схемы при произвольной зависимости напряжения на входе от времени (второй подход).

В математике есть операции прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\begin{cases}\tilde{y}_0\left(\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{y}\left(t\right)\cdot e^{-i\omega t}dt\\ \tilde{y}\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{y}_0\left(\omega\right)\cdot e^{i\omega t}d\omega\end{cases}$$

Применим прямое преобразование Фурье к напряжению на входе схемы:

$$\widetilde{U}_{0\_вх}\left(\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_{вх}\left(t\right)\cdot e^{-i\omega t}dt.$$

Здесь $\widetilde{U}_{0\_вх}\left(\omega\right)\cdot d\omega$ — комплексная амплитуда входного напряжения в полосе частот от ω до $\omega+d\omega$, что видно из обратного преобразования Фурье:

$$U_{вх}\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{U}_{0\_вх}\left(\omega\right)\cdot e^{i\omega t}d\omega.$$

Комплексная амплитуда напряжения на выходе схемы для каждой частоты сигнала выражается через комплексную амплитуду на входе и комплексный коэффициент передачи:

$$\widetilde{U}_{0\_вых}\left(\omega\right)=\widetilde{K}_U\left(\omega\right)\cdot\widetilde{U}_{0\_вх}\left(\omega\right),$$

где $\widetilde{K}_U$ — комплексный коэффициент передачи по напряжению, который мы умеем находить. Сделаем соответствующую замену в обратном преобразовании Фурье для выходного напряжения

$$U_{вых}\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{U}_{0\_вых}\left(\omega\right)\cdot e^{i\omega t}d\omega$$

и получим

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{K}_U(\omega)\cdot\widetilde{U}_{0\_вх}(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega .$$

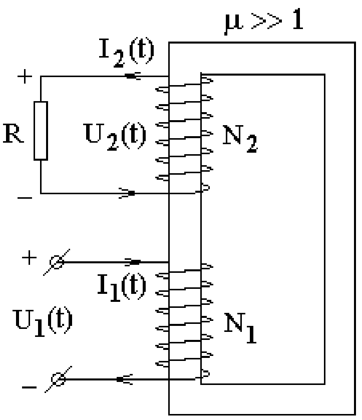
Тогда

$$\begin{cases}\widetilde{U}_{0\_вх}(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_{вх}(t)\cdot e^{-i\omega t}dt \\ U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{K}_U(\omega)\cdot\widetilde{U}_{0\_вх}(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega\end{cases}.$$

Эти два равенства позволяют найти напряжение на выходе схемы $U_{вых}(t)$ через напряжение на ее входе $U_{вх}(t)$, если мы знаем комплексный коэффициент передачи схемы $\widetilde{K}_U(\omega)$, как функцию частоты ω.

<u>**Трансформатор.**</u>

Трансформатор — две катушки на общем замкнутом сердечнике с высокой магнитной проницаемостью $\mu>>1$.



Чтобы правильно найти связи между величинами нужно внимательно следить за их знаками.

Правило знаков.

1. Пусть обе катушки намотаны в одну сторону и расположены на одной стороне сердечника.
2. $U_1>0$, если на верхнем проводе "+" напряжения.
3. $U_2>0$, если на верхнем проводе "+" напряжения.
4. $I_1>0$, если ток через катушку течет сверху вниз.
5. $I_2>0$, если наоборот, ток через катушку течет снизу вверх.

Такой выбор положительного направления тока I_2 удобен тем, что при этом положительный ток через сопротивление R течет сверху вниз и $U_2=RI_2$. Иначе было бы $U_2=-RI_2$.

Обозначим за Φ поток поля $\vec{B}$ через один виток.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд\_1} = -\dfrac{d\left(N_1\Phi\right)}{dt} \\ \mathcal{E}_{инд\_2} = -\dfrac{d\left(N_2\Phi\right)}{dt} \\ U_1 + \mathcal{E}_{инд\_1} = 0 \\ U_2 + \mathcal{E}_{инд\_2} = 0 \\ \Phi = BS \\ B = \mu_0 \mu H \\ Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2 \\ U_2 = RI_2 \end{cases} \qquad (1) \qquad =>$$

Из средней четверки уравнений $\begin{cases} U_1 + \mathcal{E}_{инд\_1} = 0 \\ U_2 + \mathcal{E}_{инд\_2} = 0 \\ \Phi = BS \\ B = \mu_0 \mu H \end{cases}$ получим

$$\begin{cases} U_1 = -\mathcal{E}_{инд\_1} = \dfrac{d\left(N_1\Phi\right)}{dt} = N_1 \dfrac{d\left(BS\right)}{dt} = N_1 S \dfrac{d\left(\mu_0 \mu H\right)}{dt} = \mu_0 \mu S N_1 \dot{H} \\ U_2 = -\mathcal{E}_{инд\_2} = \dfrac{d\left(N_2\Phi\right)}{dt} = N_2 \dfrac{d\left(BS\right)}{dt} = N_2 S \dfrac{d\left(\mu_0 \mu H\right)}{dt} = \mu_0 \mu S N_2 \dot{H} \end{cases} \qquad =>$$

$$\begin{cases} U_1 = \mu_0 \mu S N_1 \dot{H} \\ U_2 = \mu_0 \mu S N_2 \dot{H} \end{cases}$$

Подставим это вместо первой пары уравнений системы (1). Тогда получим систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} U_1 = \mu_0 \mu S N_1 \dot{H} \\ U_2 = \mu_0 \mu S N_2 \dot{H} \\ Hl = N_1 I_1 - N_2 I_2 \\ U_2 = RI_2 \end{cases} \qquad (2)$$