Переменные электромагнитные поля.

Факультатив. Потенциалы переменных электромагнитных полей.

$$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$$

Для постоянных магнитных полей это равенство доказывается, а для переменных — это определение векторного потенциала $\vec{A}$.

Рассмотрим одно из уравнений системы Максвелла:

$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{A}\right) = -rot\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \quad =>$$

$$rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad => \qquad \text{существует } \varphi \text{ такое, что}$$

$\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi$ — это определение скалярного потенциала φ для переменных электромагнитных полей. Это определение потенциала не имеет прежнего смысла — энергии единичного заряда.

Итак, определение потенциалов переменного электромагнитного поля имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}.$$

Заметим, что это определение превращается в обычное определение потенциалов электростатики и магнитостатики в случае постоянных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Факультатив. Дифференциальные уравнения для потенциалов электромагнитного поля.

Подставим определение потенциалов $\left(\varphi,\vec{A}\right)$ в уравнения Максвелла вместо полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и получим дифференциальные уравнения для потенциалов.

1). $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

При подстановке определения потенциалов в это уравнение оно превращается в тождество, так как из этого уравнения было получено определение потенциала φ.

2). $div\left(\vec{B}\right) = 0$

При подстановке определения потенциала $\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$ второе уравнение так же превращается в тождество, так как дивергенция ротора любого поля равна нулю. И действительно:

$$div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)=\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\vec{A},0\right)=0.$$

3). $div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho$

Рассмотрим электромагнитное поле в однородной изотропной среде $\begin{cases}\varepsilon=const\\ \mu=const\end{cases}$. Вакуум $\begin{cases}\varepsilon=1\\ \mu=1\end{cases}$ будет частным случаем этого рассмотрения.

$$4\pi\rho=div\left(\vec{D}\right)=div\left(\varepsilon\vec{E}\right)=\varepsilon\cdot div\left(\vec{E}\right)=\varepsilon\cdot div\left(-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\varepsilon\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right)-\frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{A}\right)$$

Здесь $\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right)=\Delta\varphi$ =>

$\Delta\varphi+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(div\left(\vec{A}\right)\right)}{\partial t}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$ — одно из дифференциальных уравнений для потенциалов $\left(\varphi,\vec{A}\right)$.

4). $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Умножим уравнение на μ и получим

$rot\left(\vec{B}\right)=\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, подставим сюда определение потенциалов и получим

$$rot\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}-\frac{\varepsilon\mu}{c}\cdot\frac{\partial\vec{\nabla}\varphi}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

С другой стороны

$$rot\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right)-\vec{A}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)=grad\left(div\left(\vec{A}\right)\right)-\Delta\vec{A}$$

Здесь двойное векторное произведение преобразовано по правилу "бац минус цап".

Приравнивая правые части последних двух равенств, получим

$$\Delta\vec{A}-grad\left(div\left(\vec{A}\right)\right)-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{\varepsilon\mu}{c}\cdot grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

Это второе дифференциальное уравнение для потенциалов $\left(\varphi,\vec{A}\right)$. Векторное уравнение — это три уравнения для проекций. Вместе с первым уравнением получаем 4-е дифференциальные уравнения для 4-х неизвестных $\left(\varphi,\vec{A}\right)$. Обычно систему дифференциальных уравнений, как и систему простых алгебраических уравнений, имеет смысл решать в том случае, если число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Факультатив. Калибровки потенциалов.

В определении потенциалов

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}$$

остался некоторый произвол.

Разные варианты устранения произвола — это и есть разные калибровки потенциалов.

Если $\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, то из первого уравнения определений потенциалов скалярный потенциал единственным образом находится через векторный потенциал $\vec{A}$ и электрическое поле $\vec{E}$.

И действительно, из

$$\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

следует

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, d\vec{l} \right)$$

аналогично тому, как в электростатике из $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$ следует $\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$.

Следовательно, если векторный потенциал $\vec{A}$ определен однозначно, то и скалярный потенциал φ находится без произвола.

Таким образом, весь произвол в определении потенциалов — это произвол в определении векторного потенциала $\vec{A}$ равенством $\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$.

Рассмотрим два разных векторных потенциала $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, соответствующих одному и тому же магнитному полю $\vec{B}$:

$$\vec{B} = rot\left(\vec{A}_1\right) = rot\left(\vec{A}_2\right).$$

Обозначим $\vec{Y} \equiv \vec{A}_2 - \vec{A}_1$. Тогда $rot\left(\vec{Y}\right) \equiv rot\left(\vec{A}_2\right) - rot\left(\vec{A}_1\right) = 0$.

Если ротор векторного поля $\vec{Y}$ равен нулю, то всегда существует скалярное поле X такое, что

$$\vec{Y} = -\vec{\nabla}X \quad => \quad \vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla}X.$$

То есть два векторных потенциала, соответствующих одному полю $\vec{B}$, могут отличаться только на градиент скалярной функции.

И, наоборот, если $\vec{A}_1$ — векторный потенциал для поля $\vec{B} = rot\left(\vec{A}_1\right)$, то добавление к векторному потенциалу $\vec{A}_1$ градиента любой скалярной функции

$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla} X$ оставит неизменным соответствие векторного потенциала полю $\vec{B} = rot\left(\vec{A}_2\right)$, так как

$$rot\left(\vec{A}_2\right) = rot\left(\vec{A}_1 - \vec{\nabla} X\right) = rot\left(\vec{A}_1\right) - \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla} X\right] = rot\left(\vec{A}_1\right) - \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right] X = rot\left(\vec{A}_1\right) = \vec{B}.$$

Следовательно, произвол в определении $\vec{A}$ такой и только такой, что $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla} X$, где X — любая функция координат и времени.

Рассмотри теперь, каков при этом произвол в величине $div\left(\vec{A}\right)$.

$$div\left(\vec{A}_2\right) = div\left(\vec{A}_1 - \vec{\nabla} X\right) = div\left(\vec{A}_1\right) - \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} X\right) = div\left(\vec{A}_1\right) - \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right) X = div\left(\vec{A}_1\right) - \Delta X$$

Оказывается, что ΔX можно сделать равным любой наперед заданной функции. И действительно, уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет решение относительно φ для любой функции ρ. То есть $\Delta\varphi$ можно сделать равным любой наперед заданной функции $-4\pi\rho$.

И так произвол в определении $\vec{A}$ таков, что $div\left(\vec{A}\right)$ можно изменить на любую величину ΔX. Следовательно, $div\left(\vec{A}\right)$ можно сделать равной любой наперед заданной функции. Произвол в определении $\vec{A}$ такой. А вот только ли такой? Казалось бы, произвол только такой. При заданной исходной функции $div\left(\vec{A}_1\right)$ и заданной конечной функции $div\left(\vec{A}_2\right)$ однозначно задан лапласиан $\Delta X = div\left(\vec{A}_1\right) - div\left(\vec{A}_2\right)$. А при заданной величине ΔX однозначно находится X, если потребовать, чтобы правая часть равенства достаточно быстро убывала на бесконечности и $X \xrightarrow[\vec{r}\to\infty]{} 0$. Следовательно, однозначно задано изменение векторного потенциала $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla} X$. Вот только правая часть уравнения $\Delta X = div\left(\vec{A}_1\right) - div\left(\vec{A}_2\right)$ не обязана стремиться к нулю на бесконечности. В частности, как мне подсказал мой студент Чубыкин Алексей Дмитриевич, можно рассмотреть волны скалярной функции Ψ, распространяющиеся со скоростью света, так что $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$. Если задать потенциалы через эту функцию Ψ следующим образом $\vec{A} = -\vec{\nabla}\Psi$ и $\varphi = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, то потенциалы будут удовлетворять калибровке Лоренца в вакууме $div\left(\vec{A}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, а электрическое и магнитное поле $\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}$ окажутся равными нулю, если их выразить через Ψ. То есть поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (например, нулевые) при заданной величине дивергенции векторного потенциала, например, в калибровке Лоренца $div\left(\vec{A}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ не задают однозначно (нулевых) величин потенциалов $\vec{A}$ и φ, и в потенциалах остается некоторый произвол.

В различных калибровках потенциалов обычно выбирают различные выражения для $div\left(\vec{A}\right)$.

1). Калибровка Кулона.

$div\left(\vec{A}\right) = 0$

В этой калибровке дифференциальные уравнения для потенциалов принимают вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \\ \Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c} grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \end{cases}$$

2). Калибровка $\varphi = 0$.

При этом из дифференциального уравнения $\Delta\varphi + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\left(div\left(\vec{A}\right)\right)}{\partial t} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$, справедливого при любой калибровке, получается уравнение

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\left(div\left(\vec{A}\right)\right)}{\partial t} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \qquad => \qquad div\left(\vec{A}\right) = -\frac{4\pi c}{\varepsilon} \cdot \int_{-\infty}^{t} \rho(t') \cdot dt'.$$

Это выражение для дивергенции векторного потенциала можно подставить во второе дифференциальное уравнение для потенциалов и получить уравнение для $\vec{A}$.

3). Калибровка Лоренца.

$div\left(\vec{A}\right) = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

Дифференциальные уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца принимают вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \\ \Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \end{cases}$$

Это 4-е уравнения Даламбера вида:

$\Delta S - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -4\pi\chi$

При $\chi = 0$ уравнение Даламбера становится волновым уравнением, где V — скорость распространения волн.

Сравнивая уравнение Даламбера с дифференциальными уравнениями для потенциалов в калибровке Лоренца, получаем

$V = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — скорость электромагнитных волн.

В оптике $V = \dfrac{c}{n}$ — определение показателя преломления n. Тогда $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Общее решение уравнения Даламбера равно сумме частного решения уравнения Даламбера и общего решения волнового уравнения.

Решение волнового уравнения — волны, проходящие мимо рассматриваемых зарядов и токов. Это волны приходящие из бесконечности и уходящие в бесконечность.

<u>Факультатив. Запаздывающие потенциалы.</u>

Без доказательства. Приведем частное решение уравнений Даламбера для потенциалов в виде запаздывающих потенциалов:

$$\begin{cases} \varphi(t,\vec{r}) = \dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\displaystyle\int\limits_{V'} \dfrac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' \\ \vec{A}(t,\vec{r}) = \dfrac{\mu}{c}\cdot\displaystyle\int\limits_{V'} \dfrac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' \end{cases}, \text{ здесь } V = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Заметим, что потенциалы почти такие же, как и для постоянных полей. Отличие в том, что потенциалы в точке $\vec{r}$ в момент времени t зависят от источников поля в предшествующий момент $\left(t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}\right)$, где $\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}$ — время распространение волны или время запаздывания потенциала в точке $\vec{r}$ от потенциала около источника поля.

К этому частному решению можно добавить любые волны, пробегающие мимо источников поля из одной бесконечности в другую бесконечность. Волны могут быть плоские, сферические, цилиндрические и др.

В частности может быть пробегающая волна, которая, уходя от зарядов и токов, в точности гасит частное решение в виде запаздывающих потенциалов.

Вместе с запаздывающими потенциалами эта волна представляет собой решение в виде опережающих потенциалов:

$$\begin{cases} \varphi(t,\vec{r}) = \dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\displaystyle\int_{V'} \dfrac{\rho\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \\ \vec{A}(t,\vec{r}) = \dfrac{\mu}{c}\cdot\displaystyle\int_{V'} \dfrac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \end{cases}$$

Это решение в виде волны, приходящей из бесконечности и гаснущей на зарядах и токах. Это — то же решение, что и запаздывающие потенциалы, только обращенное во времени.

Факультатив. Волны напряженности электрического и магнитного полей.

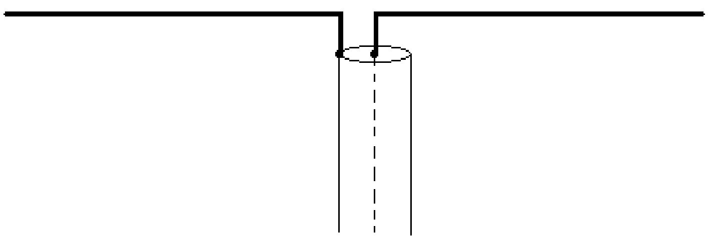
Если волновое уравнение для потенциала продифференцировать, то получится волновое уравнение для производной от потенциала. Любая производная от потенциала удовлетворяет волновому уравнению. Электрическое и магнитное поля выражаются через производные от потенциалов.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}$$

Следовательно, поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ так же удовлетворяют волновым уравнениям.

Факультатив. Простейшая антенна.

Простейшая антенна — это два проводящих прутка, направленных вдоль одной линии, но не соединяющихся друг с другом электрически. Чтобы подводить к передающей антенне (или отводить от принимающей антенны) сигнал по коаксиальному кабелю, нужно центральную жилу электрически соединить с одним прутком, а экран кабеля со вторым прутком. Соединение нужно произвести в точках прутков, которые ближе всего находятся друг к другу.



Факультатив. Электробезопасность.

Смертельный ток: 0.1 А.

Порог чувствительности: 3 мА.

Типовое сопротивление кожи: 10 кОм.

Электрический стул.

В воде 12 Вольт — смертельно опасное напряжение. Фен в ванной.

Птичка на проводе.

Шипение высоковольтных проводов — коронный разряд.

Напряжение пробоя: $E = 30$ кВ/см.

Искровой разряд. Молния. Гроза.

В грозу опасно стоять на открытом месте; опасно купаться в озере, тем более — в море; опасно стоять под деревом.

Шаровая молния — плазмоид.

Тлеющий разряд в газе $I < 0.1$ А.

Отрицательное дифференциальное сопротивление разряда в газе.

Дуговой разряд $I > 1$ А. Сопротивление дугового разряда мало.