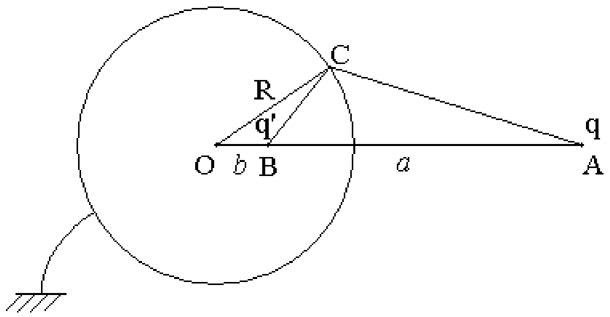
Метод изображений 2. Точечный заряд и проводящий заземленный шар.

Рассмотрим задачу.

Дан проводящий заземленный шар радиусом R и точечный заряд q на расстоянии $a > R$ от центра шара. Найти потенциал φ в каждой точке пространства.

Покажем, что заряд-изображение q' на расстоянии b от центра шара вместе с реальным зарядом q удовлетворяет граничным условиям для потенциала $\varphi|_S = 0$, если

$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{R}{a} \\ b = \dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$



$$b = \frac{R^2}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{R} = \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA} \quad \Rightarrow$$

$\Delta OCB \sim \Delta OAC$ — треугольники подобны, так как имеют общий угол $\angle BOC$ и прилежащие стороны треугольников пропорциональны $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OC}{OA}$.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \quad BC = AC\frac{R}{a}$$

Тогда

$$\varphi(C) = \frac{q}{AC} + \frac{q'}{BC} = \frac{q}{AC} + \frac{-q\dfrac{R}{a}}{AC\dfrac{R}{a}} = 0.$$

Потенциал в произвольной точке C на сфере равен нулю. Следовательно, заряды q и q' удовлетворяют граничным условиям для потенциала.

Потенциал и напряженность снаружи шара — это потенциал и напряженность пары зарядов q и q', где

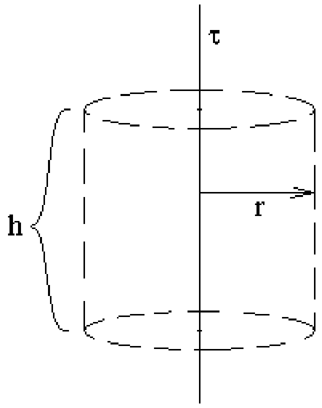
$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{R}{a} \\ b = \dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$

Здесь b — расстояние от центра шара до заряда-изображения q'.

Электрическое поле длинного заземленного проводящего цилиндра и параллельной цилиндру заряженной нити.

Найдем сначала поля $\vec{E}$ и φ одной заряженной нити.

Для этого рассмотрим соосный с нитью цилиндр и применим к этому цилиндру теорему Гаусса.



$$\Phi_E = 4\pi Q$$

Из симметрии задачи поле $\vec{E}$ направлено по радиусу в плоскости перпендикулярной заряженной нити. Тогда поток отличен от нуля только через боковую поверхность цилиндра. =>

$E \cdot S = 4\pi \cdot \tau h$ => $E \cdot 2\pi rh = 4\pi\tau h$ =>

$$E = \frac{2\tau}{r}$$

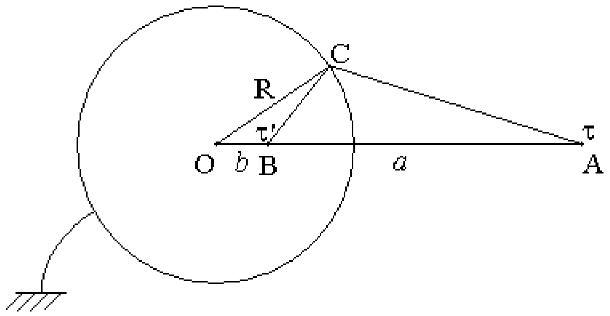
Заметим, что потенциал бесконечной заряженной нити бесконечен. В таких случаях потенциал отсчитывают не от бесконечности, а от некоторой точки, потенциал в которой выбран за ноль. Пусть эта точка расположена на расстоянии r_0 от заряженной нити. При этом из симметрии задачи следует, что потенциал в любой точке на расстоянии r_0 от нити также будет нулевым. Тогда потенциал в произвольной точке на расстоянии r от нити:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \int_r^{r_0} E_l dl = \int_r^{r_0} E_r dr = \int_r^{r_0} E\, dr = \int_r^{r_0} \frac{2\tau}{r} dr = 2\tau \cdot \ln(r)\Big|_r^{r_0} = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Рассмотрим теперь поле заряженной нити и заземленного проводящего цилиндра.

Придумаем заряды-изображения в виде второй заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau' = -\tau$, расположенной параллельно оси цилиндра на расстоянии $b = \frac{R^2}{a}$ от оси цилиндра. Здесь R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от оси цилиндра до параллельной цилиндру заряженной нити.

Рассмотрим цилиндр, заряженную нить и заряженную нить-изображение со стороны торца цилиндра.



Этот рисунок практически совпадает с рисунком предыдущего вопроса о поле заземленного шара и точечного заряда с точностью до замены $q \to \tau$ и $q' \to \tau'$.

Аналогично задаче с заземленным проводящим шаром треугольники ΔOCB и ΔOAC подобны, из подобия треугольников следует $\frac{BC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{a}$ =>

$$BC = AC\frac{R}{a}.$$

Рассмотрим потенциал двух заряженных нитей τ и τ' в произвольной точке боковой поверхности цилиндра:

$$\varphi(C) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC}\right) + 2\tau' \cdot \ln\left(\frac{r_0}{BC}\right) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC}\right) - 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC\frac{R}{a}}\right) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Правая часть равенства не зависит от положения точки C на поверхности цилиндра. Следовательно, для поля двух заряженных нитей τ и τ' боковая поверхность цилиндра эквипотенциальна. Заметим, что для бесконечных заряженных нитей потенциал на поверхности цилиндра — это разность двух бесконечных потенциалов.

Потенциал постоянен, но не нулевой. Для удовлетворения граничным условиям цилиндр должен иметь нулевой потенциал — потенциал заземленного цилиндра.

Если изменить линейную плотность нити заряда-изображения τ' на любую конечную величину, то потенциал на поверхности цилиндра изменится на бесконечную величину. Для изменения потенциала на конечную величину достаточно изменить τ' на бесконечно малую величину. Можно устремить линейную плотность заряда нити к нулю, а длину нити одновременно устремить к бесконечности так, что потенциал в некоторой точке рядом с нитью будет оставаться постоянным. Для нити с бесконечно малой линейной плотностью заряда напряженность поля везде равна нулю, а потенциал везде одинаковый. Будем считать, что это изменение τ' на бесконечно малую величину произведено. Тогда потенциал всех точек изменится на одинаковую константу, и потенциал на поверхности цилиндра можно сделать нулевым.

Следовательно, поле $\vec{E}$ снаружи заземленного цилиндрического проводника совпадает с полем $\vec{E}$ двух заряженных нитей, где параметры нити-изображения:

$$\begin{cases} \tau' = -\tau \\ b = \dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$

Здесь τ' — линейная плотность заряда нити-изображения, b — расстояние от нити-изображения до оси цилиндра, R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от заряженной нити с линейной плотностью заряда τ до оси цилиндра.

Электрическая емкость уединенного проводника.

Рассмотрим уединенный проводник.

Сообщим проводнику заряд q. Заряды как-то распределятся по поверхности проводника. Все точки проводника будут иметь один и тот же потенциал φ.

Что будет, если полный заряд проводника удвоить? Потенциал проводника удвоится.

Факультативная вставка.

Обсудим это подробнее.

Придумаем решение задачи с удвоенным зарядом проводника в виде удвоения потенциала в каждой точке объема снаружи проводника. Это придуманное решение удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, обеспечивает эквипотенциальность поверхности проводника и нулевой потенциал на бесконечности. Для придуманного решения напряженность поля в каждой точке объема удваивается, удваивается проекция напряженности на нормаль к границе проводника $E_n = 4\pi\sigma$, удваивается поверхностная плотность заряда, удваивается полный заряд поверхности проводника. То есть придуманное решение удовлетворяет граничным условиям краевой задачи с проводниками и уравнению Пуассона в объеме. Из единственности решения краевой задачи электростатики решение для потенциала будет именно таким.

Следовательно, потенциал проводника удваивается при удвоении полного заряда проводника.

Конец факультативной вставки.

Аналогично можно показать, что увеличение заряда проводника втрое приводит к увеличению втрое потенциала проводника. То есть потенциал проводника пропорционален его заряду. Тогда отношение заряда к потенциалу зависит только от размеров и формы проводника.

$C \equiv \dfrac{q}{\varphi}$ — определение емкости уединенного проводника, где φ — потенциал проводника, когда его заряд равен q.

Для примера рассмотрим емкость проводящего шара. $\varphi = \dfrac{q}{R}$ =>

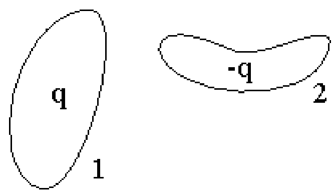
$C \equiv \dfrac{q}{\varphi} = R$ =>

$C = R$ — емкость проводящего шара равна его радиусу (в системе единиц СГС Гаусса).

$C = 4\pi\varepsilon_0 R$ — емкость шара в системе СИ. Емкость земного шара С ≈ 720 мкФ.

Емкость конденсатора.

Конденсатор — пара проводников. Пусть один из них заряжен зарядом q, а другой — зарядом $-q$. При этом проводники получат потенциалы φ_1 и φ_2.



$U \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ — определение напряжения между проводниками 1 и 2. Заметим, что напряжение и приращение потенциала отличаются друг от друга знаком.

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\infty} E_l dl - \int_{\vec{r}_2}^{\infty} E_l dl = \int_{\vec{r}_1}^{\infty} E_l dl + \int_{\infty}^{\vec{r}_2} E_l dl = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} E_l dl$$ — напряжение, выраженное через напряженность.

Аналогично рассуждениям с уединенным проводником можно показать, что при удвоении обоих зарядов потенциал каждого проводника удваивается, а при утроении — утраивается. Следовательно, потенциалы φ_1, φ_2 и напряжение U пропорциональны величине зарядов q. Отношение величины зарядов к напряжению между проводниками зависит только от размеров, формы и взаимного расположения двух проводников.

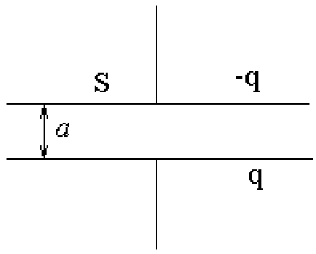
$C \equiv \dfrac{q}{U}$ — определение емкости конденсатора, где U — напряжение между проводниками конденсатора, когда одна его пластина имеет заряд $+q$, а другая — $-q$.

Емкости простейших конденсаторов 1. Плоский конденсатор.

Алгоритм вычисления емкости конденсатора:

$$\{+q,-q\} \to \vec{E}(\vec{r}) \to U \to C = \frac{q}{U}.$$

Плоский конденсатор — это две плоские проводящие пластины, расстояние a между которыми мало по сравнению с линейными размерами пластин $a << \sqrt{S}$. Здесь S — площадь пластин.



Пусть на одной пластине конденсатора находится заряд q, а на другой — заряд $-q$.

Средняя поверхностная плотность заряда каждой пластины $\sigma = \frac{q}{S}$. Заряженная плоскость создает напряженность поля $E = 2\pi\sigma$. Напряженность поля удваивается в объеме между двумя поверхностями с зарядами разных знаков $E = 4\pi\sigma$.

Напряжение между пластинами 1 и 2 можно найти по формуле

$$U = \int_1^2 E_l dl.$$

Интеграл можно брать по любой кривой соединяющие любые две точки разных пластин. Нам проще вычислять интеграл по линии перпендикулярной плоскости пластин. Вдоль этого направления

$$E_l = E = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{S}.$$

Тогда

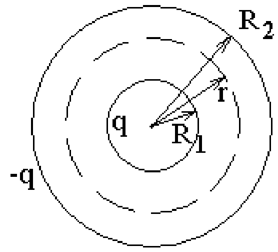
$$U = \int_1^2 E_l dl = E_l \int_1^2 dl = 4\pi\frac{q}{S}a \qquad => \qquad C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{4\pi\frac{q}{S}a} = \frac{S}{4\pi a} \qquad =>$$

$C = \frac{S}{4\pi a}$ — емкость плоского конденсатора, где S — площадь каждой пластины, a — расстояние между платинами. При стремлении расстояния между пластинами a к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

В системе СИ емкость конденсатора нужно умножить на $4\pi\varepsilon_0$, тогда: $C = \varepsilon_0 \frac{S}{a}$ — емкость плоского конденсатора в системе СИ.

<u>Емкости простейших конденсаторов 2. Сферический конденсатор.</u>

Сферический конденсатор — это две концентрические проводящие сферы с радиусами R_1 и R_2.



Рассмотрим теорему Гаусса для пунктирной сферы радиусом r:

$$\Phi_E = 4\pi Q \quad => \quad ES = 4\pi q \quad => \quad E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \quad =>$$

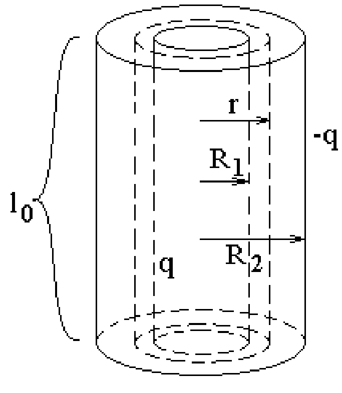
$$E = \frac{q}{r^2} \quad => \quad U = \int_1^2 E_l\, dl = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{r^2} dr = q \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad =>$$

$$C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{q \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad =>$$

$C = \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ — емкость сферического конденсатора. При стремлении разности радиусов к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

<u>Емкости простейших конденсаторов 3. Цилиндрический конденсатор.</u>

Цилиндрический конденсатор — это два соосных проводящих цилиндра. Длина цилиндров гораздо больше радиусов $l_0 >> R_2 > R_1$.



Применим теорему Гаусса для пунктирного цилиндра соосного обоим проводникам:

$\Phi_E = 4\pi Q$.

Если цилиндры бесконечно длинные, то из симметрии задачи вектор $\vec{E}$ направлен в плоскости перпендикулярной оси цилиндров и направлен по радиусу в этой плоскости. Тогда поток есть только через боковую поверхность цилиндра. Для просто длинного цилиндра то же самое будет выполняться только приближенно. Тогда

$$ES = 4\pi Q \quad => \quad E \cdot 2\pi r \cdot l_0 = 4\pi q \quad => \quad E = \frac{2q}{l_0 r} \quad =>$$

$$U = \int_1^2 E_l dl = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2q}{l_0 r} dr = \frac{2q}{l_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{2q}{l_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad =>$$

$$C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{2q}{l_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{l_0}{2\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad =>$$

$C = \dfrac{l_0}{2\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ — емкость цилиндрического конденсатора, где l_0 — длина цилиндров, R_1 и R_2 — радиусы цилиндров. При стремлении разности радиусов к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

Потенциальные и емкостные коэффициенты.

Рассмотрим N проводников с зарядами q_i. Пусть при этом потенциалы проводников принимают значения φ_i.

Потенциалы линейно зависят от зарядов. Коэффициенты этой зависимости называются потенциальными коэффициентами.

$\varphi_n = \sum_k V_{nk} q_k$, где φ_n — потенциал n-го проводника, q_k — заряд k-го проводника, V_{nk} — потенциальные коэффициенты.

Эти соотношения можно рассматривать, как N линейных уравнений относительно N неизвестных зарядов q_i. Решая эти уравнения, получим:

$q_n = \sum_k C_{nk} \varphi_k$. Здесь C_{nk} — емкостные коэффициенты.

Из энергетических соображений можно доказать, что емкостные и потенциальные коэффициенты образуют симметричные матрицы $V_{nk} = V_{kn}$ и $C_{nk} = C_{kn}$.

Недиагональные элементы матрицы C_{nk} отрицательны. Модули этих элементов называют еще межэлектродными емкостями. Например, в электронной лампе пентоде (как и в тетроде) емкость между управляющей сеткой и анодом уменьшается благодаря наличию между ними экранной сетки.

Поясним, почему зависимость между потенциалами и зарядами проводников линейная. Задачу, в которой все проводники поддерживаются под наперед заданными потенциалами, обозначим, как $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$.

Рассмотрим задачу, в которой отличен от нуля потенциал только одного проводника $(0,...,0,\varphi_k,0,...,0)$. В этой задаче заряды q_n всех проводников пропорциональны величине этого потенциала φ_k аналогично тому, как это было доказано для одного и для двух проводников. То есть $q_n = C_{nk}\varphi_k$, где C_{nk} — коэффициенты пропорциональности.

Придумаем решение для потенциала в задаче $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$ в виде суммы по разным k решений задач $(0,...,0,\varphi_k,0,...,0)$. Это придуманное решение удовлетворяет потенциалам на всех границах проводников и удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$ в объеме между проводниками. В таком случае из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что решение задачи $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$ будет равно именно придуманному решению.

Заряды на проводниках при суммировании решений суммируются, так как суммируются напряженности в любой точке объема, суммируются проекции напряженности на нормаль к поверхности проводника в каждой точке поверхностей проводников, суммируются поверхностные плотности зарядов, суммируются полные заряды на проводниках. В результате

$$q_n = \sum_k C_{nk}\varphi_k .$$

Почему в задачах по электричеству заряды на пластинах конденсатора всегда равны по величине и противоположны по знаку.

Для обычного конденсатора расстояние между обкладками конденсатора мало, так как при стремлении этого расстояния к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности. Для получения миниатюрного конденсатора с большой емкостью пластины конденсатора стараются разместить как можно ближе друг к другу.

В таком случае емкость конденсатора гораздо больше емкости каждого из двух уединенных проводников, из которых он состоит $C >> C_0$.

Рассмотрим именно такой обычный $C >> C_0$ плоский конденсатор с двумя одинаковыми пластинами. Заряды на пластинах линейно зависят от потенциалов пластин:

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases} \qquad (6.1).$$

Вместо переменных величин φ_1 и φ_2 рассмотрим две других переменных величины: $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_1 + \varphi_2$. Старые переменные линейно зависят от новых:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \varphi_2 = -\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \end{cases}.$$

Следовательно, заряды на пластинах линейно зависят от новых переменных.

Рассмотрим по очереди две задачи. В одной задаче отлична от нуля будет только разность потенциалов на двух пластинах конденсатора, а сумма потенциалов будет равна нулю. Во второй задаче наоборот, сумма потенциалов отлична от нуля, а разность — равна нулю.

И так, в первой задаче пластины конденсатора поддерживаются под равными по величине, но противоположными по знаку потенциалами $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$. Тогда, из симметрии, и заряды пластин будут иметь противоположные знаки $q_2 = -q_1$, а с учетом определения емкости $C = \frac{q}{U}$ получаем:

$$\begin{cases} q_1 = CU = C(\varphi_1 - \varphi_2) \\ q_2 = -CU = -C(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \qquad (6.2).$$

Представим теперь вторую задачу, где на пластины конденсатора поместили одинаковые заряды одного знака. Тогда из симметрии задачи следует, что разность потенциалов на пластинах будет равна нулю. Если две пластины, рассмотреть, как одну, но вдвое толще, то емкость этой пластины, как уединенного проводника почти не зависит от его толщины и будет равна емкости одной пластины C_0. Тогда для этой объединенной пластины:

$q = C_0\varphi$ в соответствии с определением емкости уединенного проводника.

Заряд на каждой пластине конденсатора будет при этом вдвое меньше

$$q_1 = q_2 = \frac{q}{2} = \frac{C_0\varphi}{2},$$

а потенциал каждой пластины будет равен φ:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} q_1 = C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases} \qquad (6.3).$$

Если на пластинах конденсатора одновременно отличны от нуля и разность и сумма потенциалов, то, объединяя равенства (6.2) и (6.3), получим:

$$\begin{cases} q_1 = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = -C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases} \qquad (6.4).$$

Возникает вопрос, почему можно объединить равенства, если, например, φ_1 в одной задаче имеет одну величину, а в другой — другую? Дело в том, что $\varphi_1 - \varphi_2$ можно рассматривать, как единый символ. Аналогично $\varphi_1 + \varphi_2$. В одной задаче есть только $\varphi_1 - \varphi_2$, в другой — только $\varphi_1 + \varphi_2$, а в суммарной задаче есть и то и другое.

Из (6.4) при условии $C_0 \ll C$ следует

$$\begin{cases} q_1 \approx C\cdot(\varphi_1-\varphi_2)=CU \\ q_2 \approx -C\cdot(\varphi_1-\varphi_2)=-CU \end{cases} \quad => \quad q_2 \approx -q_1$$ практически при любых значениях φ_1 и φ_2.

Если мы все же поместим на пластины конденсатора такие заряды, что $q_1+q_2 \neq 0$, то обе пластины конденсатора окажутся под огромным и почти одинаковым потенциалом относительно Земли.

И действительно, из

$$\begin{cases} q_1 = C\cdot\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+C_0\cdot\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{4} \\ q_2 = -C\cdot\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+C_0\cdot\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{4} \end{cases}$$

следует

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{q_1+q_2}{C_0}+\dfrac{q_1-q_2}{4C}\approx\dfrac{q_1+q_2}{C_0} \\ \varphi_2 = \dfrac{q_1+q_2}{C_0}-\dfrac{q_1-q_2}{4C}\approx\dfrac{q_1+q_2}{C_0} \end{cases},$$

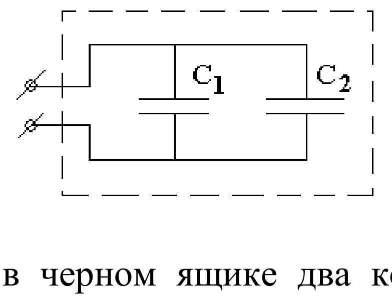
где при малой величине C_0 и $q_1+q_2\neq 0$ потенциалы φ_1 и φ_2 окажутся очень большими по модулю и почти одинаковыми.

Сравнивая (6.1) и (6.4), получим

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} C+\dfrac{C_0}{4} & -C+\dfrac{C_0}{4} \\ -C+\dfrac{C_0}{4} & C+\dfrac{C_0}{4} \end{pmatrix}.$$

Электрическая емкость параллельного и последовательного соединения конденсаторов.

Пусть два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно и помещены в черный ящик, из которого торчат два провода:



Если не знать, что в черном ящике два конденсатора, а не один, то емкость этого одного конденсатора можно найти опытным путем.

Приложим к проводам напряжение U и измерим, какой заряд q протечет по проводам. Тогда $C=\dfrac{q}{U}$.

При параллельном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$. Тогда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} = C_1 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C = C_1 + C_2.$$

Емкости параллельно соединенных конденсаторов складываются. Аналогично для большего числа параллельно соединенных конденсаторов:

$C = \sum_i C_i$ — емкость при параллельном соединении конденсаторов.
