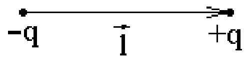
Простейший электрический диполь.

Простейший электрический диполь — это пара точечных зарядов противоположных знаков и одинаковых по модулю.



$$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i = q\vec{l} \qquad =>$$

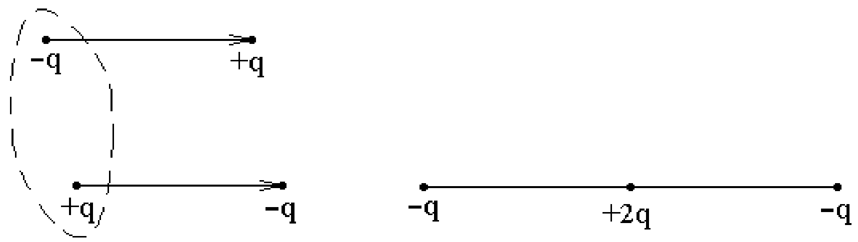
$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Здесь $\vec{p}$ — дипольный момент пары зарядов $-q$ и $+q$, $\vec{l}$ — вектор направленный из заряда $-q$ к заряду $+q$.

Простейший квадруполь, октуполь, гексадекаполь и т.д.

Если точечный заряд продублировать, поменять знак и сдвинуть, то полученная пара зарядов образует простейший диполь.

Если заряды простейшего диполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший квадруполь.



На рисунке приведены два варианта квадруполей.

Если заряды простейшего мультиполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший мультиполь следующего порядка.

Напряженность поля точечного диполя.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$$

Раскроем последнее выражение, как производную от произведения $(\vec{p},\vec{r})$ на $\dfrac{1}{r^3}$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\cdot\vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) - (\vec{p},\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$$

Вычислим отдельно каждую из производных в последнем выражении.

Сначала вычислим $\vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r})$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p},\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_x x + p_y y + p_z z\right) = p_x \qquad => \qquad \vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p}$$

Вычислим теперь $\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = \vec{\nabla}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right) = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r}$$

Найдем $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \frac{q}{r} \\ &\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ &\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad q\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Тогда

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r} = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -3\frac{\vec{r}}{r^5}.$$

Подставим $\begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p} \\ \vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = -3\frac{\vec{r}}{r^5} \end{cases}$ в $\vec{E} = -\frac{1}{r^3}\cdot\vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) - (\vec{p},\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$ и получим:

$\vec{E} = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$, где $\vec{r}$ — вектор, направленный из диполя $\vec{p}$ в точку наблюдения.

Напряженность поля точечного диполя с учетом поля внутри самого диполя.

Без доказательства:

$$\vec{E} = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3}\pi\vec{p}\cdot\delta(\vec{r}).$$

Здесь $\delta(\vec{r})$ — дельта-функция Дирака. Для дельта-функции по определению:

при $\vec{r} \neq 0$: $\delta(\vec{r}) = 0$,

при $\vec{r} = 0$: $\delta(\vec{r}) = \infty$,

$$\int\limits_{V=\infty} \delta(\vec{r})\cdot dV = 1.$$

$\delta(\vec{r})$ — очень узкая и очень высокая функция.

Для точечного заряда q_0, расположенного в точке $\vec{r}_0$, объемная плотность заряда:

$$\rho(\vec{r}) = q_0\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}_0).$$

Момент сил, действующих на точечный диполь в электрическом поле.

Рассмотрим систему зарядов $\{q_i\}$, близко расположенных друг к другу. Суммарный момент внутренних сил равен нулю в соответствии с третьим законом Ньютона. Тогда момент сил, действующих на систему зарядов, можно найти, как сумму моментов внешних сил, действующих на каждый из зарядов:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] = \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i\vec{E}_i\right].$$

Если расстояния между зарядами малы, то напряженности внешнего электрического поля в точках расположения разных зарядов примерно равны $\vec{E}_i \approx \vec{E}$. =>

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i\vec{E}_i\right] \approx \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i\vec{E}\right] = \sum_i \left[q_i\vec{r}_i, \vec{E}\right] = \left[\sum_i q_i\vec{r}_i, \vec{E}\right] = \left[\vec{p}, \vec{E}\right] \quad =>$$

$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$, где $\vec{M}$ — момент сил, $\vec{p}$ — дипольный момент, $\vec{E}$ — внешнее по отношению к диполю электрическое поле.

Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле.

Сумма внутренних сил между зарядами диполя равна нулю по третьему закону Ньютона. Тогда силу, действующую на диполь, можно найти, как сумму внешних сил, действующих на отдельные заряды диполя:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i\vec{E}_i .$$

Если, как и в предыдущем вопросе считать, что $\vec{E}_i \approx \vec{E}$, то для диполя с нулевым суммарным зарядом суммарная сила будет равна нулю. Поэтому для определения величины силы потребуется учесть небольшое различие величин $\vec{E}_i = \vec{E}\left(\vec{r}_i\right)$ в точках $\vec{r}_i$ расположения разных зарядов q_i рассматриваемого диполя. Чтобы учесть это различие, разложим напряженность электрического поля $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$ в ряд Тейлора по степеням $\vec{r}$ в малой окрестности рассматриваемого диполя.

Поместим начало координат вблизи зарядов диполя. Рассмотрим разложение x-проекции поля $\vec{E}$ в ряд Тейлора в точке расположения заряда q_i. Это разложение по степеням радиус-вектора $\vec{r}_i$. По аналогии с одномерным рядом Тейлора:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \approx f(0) + x \cdot \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=0} \\ x \to \vec{r}_i \\ f(x) \to E_{ix} = E_x\left(\vec{r}_i\right) \end{array}\right\} \quad =>$$

$$E_{ix} = E_x(\vec{r}_i) \approx E_x(0) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} E_x\Big|_{\vec{r}_i=0}\right) = E_x + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} E_x\right) = E_x + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right) E_x$$

=>

$$\vec{E}_i \approx \vec{E} + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E} \qquad =>$$

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i \approx \sum_i q_i \left\{\vec{E} + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E}\right\} = \vec{E} \cdot \sum_i q_i + \left(\sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = Q\vec{E} + \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

В последнем выражении первое слагаемое — сила, действующая на полный заряд системы зарядов, а второе слагаемое — сила, действующая на диполь.

$\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$ — сила, действующая на точечный диполь, где $\vec{F}$ — сила, $\vec{p}$ — дипольный момент, $\vec{E}$ — электрическое поле.

Энергия диполя в электрическом поле.

Рассмотрим правило "бац минус цап"

$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}, \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ для векторов $\vec{p}$, $\vec{\nabla}$, $\vec{E}$ и получим

$\left[\vec{p}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)$.

В левой части равенства $\left[\vec{p}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = \left[\vec{p}, rot\left(\vec{E}\right)\right]$, но по теореме о циркуляции электростатического поля в дифференциальной форме $rot\left(\vec{E}\right) = 0$. Тогда $\left[\vec{p}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = 0$ => $\vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right) = 0$ =>

$\vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) = \vec{E}\left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right) = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$

Тогда из $\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$ следует $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$.

Для любой природы сил, если $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$, то W — потенциальная энергия. Тогда из $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) = -\vec{\nabla}\left(-\left(\vec{p}, \vec{E}\right)\right)$ следует, что

$W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — энергия точечного диполя в электрическом поле.

Энергия наведенного диполя.

Формула $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ безусловно справедлива для жесткого диполя, который может поворачиваться в поле $\vec{E}$, но в котором заряды не могут изменять взаимного расположения. Некоторые молекулы не имеют дипольного момента, пока нет внешнего поля $\vec{E}$. При включении поля $\vec{E}$ положительные заряды молекулы смещаются по полю, а отрицательные — против поля. В результате молекула приобретает так называемый наведенный дипольный момент пропорциональный полю: $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, где α — поляризуемость молекулы.

Наведенный диполь имеет две разных энергии:

$W_1 = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — чисто электрическая энергия, которая зависит только от расположения зарядов диполя и не зависит от природы диполя жесткого или наведенного.

Вторая энергия $W_2 = +\frac{1}{2}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — энергия упругих сил внутри молекулы, которые пытаются вернуть заряды на исходное место.

С учетом этих двух энергий энергия наведенного диполя:

$$W = -\frac{1}{2}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$$

Обычно под энергией наведенного диполя подразумевают именно эту величину, полученную с учетом энергии упругих сил, пытающихся вернуть заряды диполя на свои места, занимаемые без внешнего поля.

Электростатика диэлектриков.

Диэлектрик — материал, в котором не течет ток под действием постоянного электрического поля.

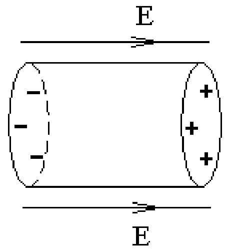
Поляризация диэлектрика и связанные заряды.

В электрическом поле некоторые молекулы ведут себя, как жесткие диполи, например HF, другие — как наведенные диполи, например N_2.

Жесткие диполи поворачиваются вдоль поля, а наведенные — наводятся вдоль поля.

В любом случае под действием электрического поля положительные заряды смещаются по полю $\vec{E}$, а отрицательные — против поля.

Если электрическое поле одинаковое в разных точках диэлектрика, то при смещении зарядов в объеме диэлектрика заряды не появляются. Не скомпенсированные заряды появляются на границах диэлектрика.



Эти заряды называются связанными зарядами.

Будем называть заряды связанными, если это макроскопические заряды, которые образуются только в результате смещения зарядов внутри каждой молекулы. Любые другие заряды будем называть свободными.

Все заряды либо связанные, либо свободные.

Введем обозначения:

ρ — плотность свободных зарядов,

ρ' — плотность связанных зарядов,

$\rho + \rho'$ — плотность всех зарядов.

$\vec{P} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dV}$ — поляризация среды, объемная плотность дипольного момента или дипольный момент единицы объема.

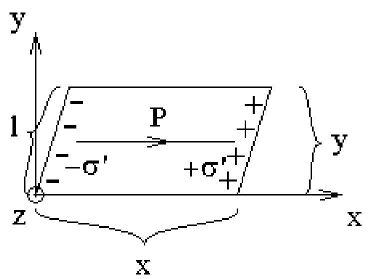
Если n — концентрация молекул или число молекул в единице объема, то, разделив дипольный момент единицы объема $\vec{P}$ на число молекул в единице объема n, получим средний дипольный момент молекулы $\dfrac{\vec{P}}{n} = \left\langle \vec{p} \right\rangle$. Тогда

$\vec{P} = n\left\langle \vec{p} \right\rangle$, где $\vec{P}$ — поляризация среды, n — концентрация молекул, $\left\langle \vec{p} \right\rangle$ — средний дипольный момент молекулы.

Найдем связь между величиной поляризации и плотностью связанных зарядов.

При поляризации среды положительные связанные заряды смещаются вдоль вектора поляризации, а отрицательные — навстречу поляризации.

Рассмотрим наклонный параллелепипед, который поляризован вдоль одного из ребер:



Рассмотрим два выражения для дипольного момента всего куска диэлектрика и приравняем их друг к другу:

$$\begin{Bmatrix} p = P \cdot V = P \cdot xyz \\ p = Q' \cdot x = \sigma' \cdot S \cdot x = \sigma' \cdot lz \cdot x \end{Bmatrix} \quad =>$$

$$yP = \sigma' l \quad =>$$

$$\sigma' = \frac{y}{l} P = P \cdot \cos\left(\widehat{\vec{P}, d\vec{S}}\right) = P_n .$$

На границе диэлектрик-вакуум образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Аналогично на границе двух диэлектриков:

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ — скачок нормальной составляющей поляризации на границе двух диэлектрических сред определяется поверхностной плотностью связанных зарядов σ', здесь нормаль направлена из среды 1 в среду 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1\to 2}$.

Заметим, что поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$. Чтобы понять это представим себе, что рассматриваемый параллелепипед разрезан надвое произвольной плоскостью. Раздвинем две части параллелепипеда вправо и влево. На двух новых границах появятся связанные заряды противоположного знака с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Рассмотрим плоскость ровно посередине между двумя новыми границами диэлектрика. Соединим две части параллелепипеда обратно. Заряды на двух новых границах скомпенсируют друг друга и пропадут. Это означает, что через единицу площади рассматриваемой нами плоскости по границе между двумя частями параллелепипеда переместились заряды $\sigma' = P_n$, чтобы скомпенсировать заряды противоположного знака. Следовательно, в процессе поляризации диэлектрика через эту плоскость параллельную пропавшей границе прошли заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Напомним, что направление плоскости выбрано произвольно. Следовательно, процесс поляризации среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим диэлектрик, который по-разному поляризован в разных точках.

Мысленно выделим внутри этого диэлектрика некоторый объем V.

Рассмотрим единичную площадку на поверхности S этого объема.

Через эту единичную площадку при поляризации диэлектрика перемещается заряд $\sigma' = P_n$, так как поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим, какой заряд Q' смещается через замкнутую поверхность S, которая является границей объема V.

$$Q' = \oint_S dQ' = \oint_S \sigma' dS = \oint_S P_n dS = \oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right)$$

Смещается заряд, равный потоку вектора поляризации через замкнутую поверхность.

Заряд, который остается внутри замкнутой поверхности S отличается знаком:

$\oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q'$ — связь потока поляризации через границу объема и связанного заряда Q' внутри объема. В системе СИ связь такая же.

Разделим это равенство на объем V и устремим объем к нулю:

$$\oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \quad \left|\frac{1}{V}\right.; \quad \left|V \to 0\right. \qquad =>$$

$$div\left(\vec{P}\right) = -\rho'$$

Рассмотрим три формы трех соотношений для диэлектриков. Во-первых:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi\left(Q + Q'\right) \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\left(\sigma + \sigma'\right) \end{cases}$$

для микроскопического внутриатомного поля $\vec{E}$, так как на микроскопическом внутриатомном уровне свободные и связанные заряды равноправны.

Под напряженностью электрического поля $\vec{E}$ в диэлектрике будем понимать усредненное микроскопическое поле $\vec{E}$ по макроскопическому, но малому, объему. Следовательно, для напряженности поля $\vec{E}$ в диэлектрике будут выполняться те же соотношения, что и для микроскопического внутриатомного поля $\vec{E}$.

Дополним эти уравнения следующими соотношениями:

$$\begin{cases} div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \oint\limits_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Здесь, как и раньше, единичный вектор нормали к границе направлен из объема 1 в объем 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1\to 2}$.

Два способа вычисления электростатического потенциала φ, создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление потенциала связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{q}{r}$ и получим:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V'} \frac{\rho'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} + \oint\limits_{S'} \frac{\sigma'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dS'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

(в системе СИ умножить на $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

2-ой способ — вычисление потенциала молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$ и получим:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V'} \frac{\left(\vec{P}\left(\vec{r}\,'\right), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

(в системе СИ $\quad \varphi\left(\vec{r}\right) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int\limits_{V'} \frac{\left(\vec{P}\left(\vec{r}\,'\right), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$)

Оба интегральных выражения для потенциала имеют особую точку при условии $\vec{r}\,' = \vec{r}$, в которой знаменатель подынтегральных выражений обращается в ноль. Эта особая точка является интегрируемой особенностью. И действительно, если сделать замену переменной интегрирования $\vec{r}\,'$ на переменную $\vec{r}_0 = \vec{r}\,' - \vec{r}$, то в окрестности особой точки получим:

$$dV' = 4\pi r_0^2 dr_0 \quad \text{и} \quad dS' = 2\pi r_0 dr_0 .$$

Тогда после сокращения r_0 в знаменателе и числителе подынтегральных выражений особая точка пропадает. В этом смысле рассматриваемая особая точка — интегрируемая особая точка.