

Два способа вычисления электростатического поля E , создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление напряженности поля связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3}$ и получим:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho'(\vec{r}') \cdot dV' + \oint_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma'(\vec{r}') \cdot dS'$$

(в системе СИ умножить на $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$)

Особая точка в интеграле по объему — интегрируемая особенность, которая пропадает при замене переменной интегрирования, а особая точка в интеграле по поверхности — это неинтегрируемая особенность. Причина этого в том, что при условии $\vec{r}' = \vec{r}$ точка наблюдения находится на поверхности со связанными зарядами, а напряженность поля \vec{E} испытывает скачок при переходе через заряженную поверхность. То есть, поле \vec{E} не имеет определенного значения на заряженной поверхности диэлектрика.

2-ой способ — вычисление напряженности поля молекулярных диполей.

Для каждого диполя воспользуемся формулой $\vec{E} = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3} \pi \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r})$, заменим здесь $\vec{r} \rightarrow (\vec{r} - \vec{r}')$ и $\vec{p} \rightarrow \vec{P}(\vec{r}') \cdot dV'$, просуммируем поле \vec{E} по диполям всего объема $\int_{V'} \bullet$ и получим поле \vec{E} в точке с радиус-вектором \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{V'} \left(3 \frac{(\vec{P}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot dV' - \frac{4}{3} \pi \cdot \int_{V'} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot dV' \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{V'} \left(3 \frac{(\vec{P}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot dV' - \frac{4}{3} \pi \cdot \vec{P}(\vec{r}) \end{aligned}$$

(в системе СИ умножить на $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$)

Здесь интеграл содержит неинтегрируемую в обычном смысле особую точку. Но интеграл по объему имеет определенное значение, если рассматривать интеграл в смысле главного значения. В окрестности особой точки мысленно вырезают шар с малым радиусом r_0 и с центром в особой точке. В объеме без этого шара интеграл берется и имеет определенное значение. Интеграл в смысле главного значения — это предел, к которому стремится интеграл по объему без шара при стремлении радиуса шара к нулю.

Вектор электрической индукции или электрического смещения.

$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ — определение вектора электрической индукции или электрического смещения.

$$\text{В СИ: } \vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Рассмотрим дивергенцию поля \vec{D} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{D}) &= \operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = \operatorname{div}(\vec{E}) + 4\pi \cdot \operatorname{div}(\vec{P}) = 4\pi(\rho + \rho') + 4\pi \cdot (-\rho') = 4\pi\rho \\ \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{D}) &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить в интегральной форме $\Phi_D = 4\pi Q$ и для границы раздела сред $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$. Здесь величины ρ, Q, σ относятся только к свободным зарядам.

$$\text{В СИ: } \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho$$

Четыре основных формулы для диэлектриков в трех формах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = 4\pi Q \\ D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho' \\ \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \\ \oint_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi(\rho + \rho') \\ \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi(Q + Q') \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma') \end{array} \right.$$

В этих формулах, как и обычно, нормаль к границе раздела направлена из объема 1 в объем 2: $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

$$\text{В системе СИ: } \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \\ \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho') \\ \operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho' \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{array} \right.$$

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость среды.

$\vec{P} \equiv \chi \vec{E}$ — определение χ — диэлектрической восприимчивости среды.

В системе СИ: $\vec{P} \equiv \varepsilon_0 \chi \vec{E}$.

Связь величин \vec{P} и \vec{E} не всегда линейна, но для линейной связи можно ввести диэлектрическую восприимчивость среды.

В кристаллах χ — матрица или тензор второго ранга.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \text{ или } P_i = \sum_k \chi_{ik} E_k.$$

Тензор диэлектрической восприимчивости — симметричный тензор (без доказательства):

$$\chi_{ik} = \chi_{ki}.$$

$\vec{D} \equiv \varepsilon \vec{E}$ — определение ε — диэлектрической проницаемости среды.

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} + 4\pi \chi \vec{E} = (1 + 4\pi \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$\varepsilon = 1 + 4\pi \chi$ — связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости среды.

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}, \text{ откуда } \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}$$

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \text{ так как } \chi_{ik} = \chi_{ki}$$

$$\text{В системе СИ: } \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \\ \varepsilon = 1 + \chi \end{cases}$$

Связанные заряды обычно присутствуют только на поверхности диэлектрика.

$$\rho' = -\text{div}(\vec{P}) = -\text{div}(\chi \vec{E})$$

Внутри однородного диэлектрика $\chi = \text{const}$ и эту константу можно вынести за знак производной:

$$\rho' = -\text{div}(\chi \vec{E}) = -\chi \cdot \text{div}(\vec{E}) = -\chi \cdot 4\pi(\rho + \rho') \quad \Rightarrow \quad \rho' = -\chi \cdot 4\pi(\rho + \rho')$$

$$\Rightarrow \quad \rho' = -\frac{4\pi\chi}{1 + 4\pi\chi} \rho$$

Если диэлектрик однородный и в объеме диэлектрика нет свободных зарядов $\rho = 0$, то нет и связанных $\rho' = 0$.

Алгоритм решения симметричных задач с диэлектриками.

Алгоритм решения задач:

$$\Phi_D = 4\pi Q \Rightarrow DS = 4\pi Q \Rightarrow D = \frac{4\pi Q}{S} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} \Rightarrow \sigma' = -(P_{2n} - P_{1n}) \\ \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \end{array} \right.$$

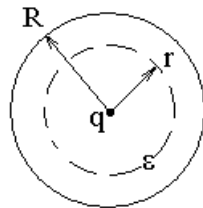
Простейшие задачи с диэлектриками 1. Сферическая симметрия.

Рассмотрим задачу. Дан диэлектрический шар с проницаемостью ε и радиусом R . В центре шара находится точечный заряд q .

Найти: $\vec{D}, \vec{E}, \varphi, \vec{P}, \sigma'$.

Решение.

В соответствии с симметрией задачи рассмотрим пунктирную сферу с произвольным радиусом r , центр которой совпадает с центром диэлектрического шара. Применим электростатическую теорему Гаусса $\Phi_D = 4\pi Q$ для поверхности выбранной сферы.



Из симметрии задачи следует, что вектор электрической индукции \vec{D} направлен по радиусу в любой точке пространства, и во всех точках пунктирной сферы вектор \vec{D} имеет одинаковую длину. Тогда

$$\Phi_D = 4\pi Q \Rightarrow DS = 4\pi q \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \Rightarrow$$

$$D = \frac{q}{r^2} \quad (\text{в системе СИ умножить на } \frac{1}{4\pi})$$

Этот вывод справедлив и в том случае, если $r \leq R$, и в том случае, если $r \geq R$.

Найдем теперь вектор \vec{E} из равенства $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon r^2} \quad \text{- внутри диэлектрического шара при } r < R,$$

$$E = D = \frac{q}{r^2} \quad \text{- снаружи диэлектрического шара при } r > R.$$

Найдем теперь потенциал φ сначала снаружи шара при $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = q \cdot \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{r} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{q}{r} \text{ при } r \geq R.$$

Теперь найдем потенциал внутри диэлектрического шара.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^R E dr + \int_R^{\infty} E dr = \int_r^R \frac{q}{\varepsilon r^2} dr + \varphi(R) = \\ &= \frac{q}{\varepsilon} \cdot \int_r^R \frac{dr}{r^2} + \frac{q}{R} = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{R} \end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{R} \text{ при } r \leq R.$$

Найдем теперь поляризацию среды \vec{P} .

$$\vec{P} = \chi \vec{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2} \text{ при } r < R \text{ и } P = 0 \text{ при } r > R.$$

И, наконец, найдем поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрического шара.

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

Пусть объем 1 — диэлектрик, а объем 2 — вакуум, тогда

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = P_{1n} = P(R) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{q}{\varepsilon R^2}$$

Повторим ответы:

$$D = \frac{q}{r^2} \text{ внутри и снаружи шара,} \quad (\text{в СИ } \cdot \frac{1}{4\pi})$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon r^2} \text{ при } r < R, \quad E = \frac{q}{r^2} \text{ при } r > R, \quad (\text{в СИ } \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0})$$

$$\varphi = \frac{q}{R} - \frac{q}{\varepsilon R} + \frac{q}{\varepsilon r} \text{ при } r \leq R, \quad \varphi = \frac{q}{r} \text{ при } r \geq R, \quad (\text{в СИ } \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0})$$

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \text{ при } r < R, \quad P = 0 \text{ при } r > R, \quad (\text{в СИ — также})$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{R^2}. \quad (\text{в СИ — также})$$

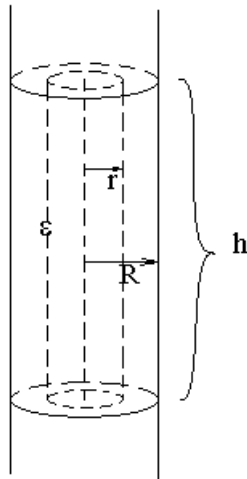
Простейшие задачи с диэлектриками 2. Цилиндрическая симметрия.

Рассмотрим задачу. Дан бесконечный диэлектрический цилиндр с диэлектрической проницаемостью ε , радиусом R . На оси цилиндра расположена заряженная нить с линейной плотностью заряда τ .

Найти: E , D .

Решение.

Рассмотрим поток вектора \vec{D} через поверхность цилиндра длиной h радиусом r . Ось цилиндра совпадает с осью симметрии задачи.



По теореме Гаусса:

$$\Phi_D = 4\pi Q.$$

Из симметрии задачи поток через доньшки цилиндра отсутствует. Остается поток через боковую поверхность цилиндра:

$$DS = 4\pi\tau h \quad \Rightarrow \quad D \cdot 2\pi r h = 4\pi\tau h \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2\tau}{r} \quad (\text{в СИ } \cdot \frac{1}{4\pi})$$

Это выражение справедливо и внутри $r < R$ и снаружи $r > R$ диэлектрического цилиндра. Вектор \vec{D} направлен в плоскости перпендикулярной оси цилиндра и в этой плоскости направлен по радиусу окружности сечения цилиндра.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{2\tau}{\epsilon r} \quad \text{при } r < R,$$

$$E = \frac{2\tau}{r} \quad \text{при } r > R.$$

$$(\text{в СИ } \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0})$$