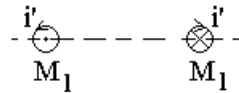


Намагниченность и связанные токи (продолжение).

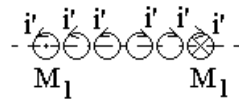
Факультативная вставка.

Докажем, что нет других связанных токов пронизывающих контур l , кроме токов, текущих по боковой поверхности тора.

Повернем плоскость рисунка так, чтобы плоскость контура l оказалась перпендикулярна плоскости рисунка.



Магнетик на площадке, ограниченной контуром, можно разбить на трубки (торы) других контуров.



Для новых трубок, сколько связанных токов втекает в площадку, ограниченную контуром l , столько и вытекает.

Кроме составляющей намагниченности M_l , остальные составляющие намагниченности создают связанные токи, которые так же имеют нулевой суммарный связанный ток через площадку, ограниченную контуром.

Конец факультативной вставки.

$$\oint_l M_l dl = \frac{I'}{c} \quad \text{— соотношение между намагниченностью } \vec{M} \text{ и связанными}$$

токами I' в интегральной форме.

Получим теперь соотношение между намагниченностью и связанными токами в дифференциальной форме.

$$\oint_l M_l dl = \frac{I'}{c} \quad \left| \cdot \frac{1}{S} \right. \quad \Rightarrow \quad \left(\text{rot}(\vec{M}) \right)_n = \frac{1}{c} \frac{I'}{S} = \frac{j'_n}{c}, \text{ где } \vec{n} \uparrow \uparrow \vec{S} \text{ — любое}$$

направление. Тогда

$$\text{rot}(\vec{M}) = \frac{\vec{j}'}{c}$$

$$\text{В системе СИ: } \text{rot}(\vec{M}) = \vec{j}'.$$

В трех формах связь намагниченности среды \vec{M} и связанных токов в дифференциальном, интегральном виде и для границы намагниченной среды имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{M}) = \frac{\vec{j}'}{c} \\ \oint_l M_l dl = \frac{I'}{c} \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{i'}{c} \end{array} \right. .$$

Связанные токи и намагниченность среды образуют правый винт или $\vec{\tau} = \left[\begin{matrix} \vec{i}' \\ \vec{i}' \end{matrix}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right]$.

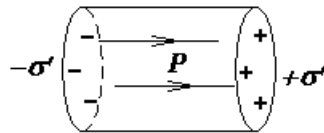
Намагниченность и связанные токи для переменных полей.

Соотношение $rot(\vec{M}) = \frac{\vec{j}'}{c}$ справедливо только для постоянных магнитных полей, независимых от времени.

В более общем случае

$$\vec{j}' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot rot(\vec{M}).$$

Чтобы понять природу слагаемого $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ представим себе диэлектрический цилиндр, который поляризован вдоль оси цилиндра. Пусть поляризация цилиндра \vec{P} линейно нарастает во времени.



На торцах цилиндра образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P$, что следует из граничных условий $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$.

Производная от зарядов по времени равна силе тока, а производная от поверхностной плотности заряда по времени равна плотности тока

$$j' = \frac{d\sigma'}{dt} = \frac{dP}{dt}.$$

Частная производная по времени вместо полной производной подчеркивает неизменность пространственных координат при вычислении производной.

Напряженность магнитного поля.

На внутриатомном микроскопическом уровне нет разницы между молекулярными токами I' и токами проводимости I . И те и другие находятся в вакууме и создают магнитное поле \vec{B} . Тогда для поля \vec{B} на микроскопическом уровне

$$\oint_l (\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} (I + I').$$

Усредненное микроскопическое магнитное поле \vec{B} называют полем \vec{B} в среде. Для усредненного поля \vec{B} будет выполнено то же соотношение

$$\oint_l (\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} (I + I').$$

Вычтем из этого равенства следующее равенство, умноженное на 4π

$$\oint_l (\vec{M}, d\vec{l}) = \frac{I'}{c} \text{ и получим}$$

$$\oint_l (\vec{B} - 4\pi\vec{M}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I.$$

Определим напряженность магнитного поля \vec{H} следующим равенством:

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi\vec{M}. \text{ Тогда}$$

$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, что вполне аналогично соотношению для электрических полей $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$. Оба равенства можно прочесть одинаково: индукция поля равна сумме напряженности поля и 4π , умноженному на объемную плотность дипольного момента.

$$\text{Из равенства } \oint_l (\vec{B} - 4\pi\vec{M}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I \text{ следует}$$

$$\oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I \text{ — теорема о циркуляции напряженности магнитного}$$

поля в интегральной форме. Из интегральной формы следуют две другие: дифференциальная форма и форма для границы раздела сред.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{array} \right. \text{ — связь напряженности магнитного поля } \vec{H} \text{ и токов}$$

проводимости в трех формах.

$$\text{В системе СИ:} \quad \oint_l H_l dl = I \quad \oint_l M_l dl = I'$$

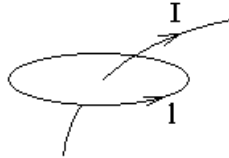
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad \vec{m} = I\vec{S} \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Основные формулы для магнитного поля в среде.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{M}) = \frac{\vec{j}'}{c} \\ \oint_l M_l dl = \frac{I'}{c} \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{i'}{c} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{B}) = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}') \\ \oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c}(I + I') \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}(i + i') \end{array} \right.$$

Во всех равенствах направление обхода контура и направление тока образуют правый винт,



$\vec{\tau} = \left[\begin{array}{l} \vec{i} \\ i \\ i \end{array}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right]$ — единичный вектор по касательной к поверхности, по

которой текут токи, и перпендикулярный токам.

Сравнение формул для электрического и магнитного полей.

$$\begin{array}{ll} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} & \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \\ \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} & \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \\ \vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \int_V \rho \vec{r} dV & \vec{m} = \frac{I}{c} \vec{S} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, \vec{j}] dV \\ \text{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho & \text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div}(\vec{E}) = 4\pi(\rho + \rho') & \text{rot}(\vec{B}) = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}') \\ \text{div}(\vec{P}) = -\rho' & \text{rot}(\vec{M}) = \frac{\vec{j}'}{c} \\ \text{rot}(\vec{E}) = 0 & \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} & \vec{A} = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \\ \vec{E} = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} & \vec{B} = 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \end{array}$$

Электрическое и магнитное поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Граничные условия позволяют найти поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Если на границе полости нет свободных поверхностных зарядов и поверхностных токов проводимости $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \vec{i} = 0 \end{cases}$, то граничные условия для

электрического и магнитного полей выглядят одинаково:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Поэтому дальнейшие рассуждения одинаковы для электрического и магнитного полей.

Рассмотрим полость в виде длинного цилиндра с осью цилиндра направленной вдоль поля.

Для цилиндрической полости, вытянутой вдоль поля, линии поля идут по касательной к боковой поверхности цилиндра полости и почти не искривляются.



Граничные условия на боковой поверхности полости:

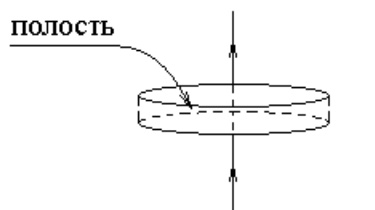
$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \quad \text{или} \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0. \quad \Rightarrow$$

Напряженность в полости, вытянутой вдоль поля, одинаковая в среде и в полости.

Индукция поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем напряженность электрического или магнитного поля в веществе.

Для цилиндрической полости, сплюснутой перпендикулярно полю, линии поля направлены перпендикулярно доньшкам полости и, проходя через доньшки, почти не искривляются.



Граничные условия на доньшках полости:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad \text{или} \quad B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad \Rightarrow$$

Индукция в полости, сплюснутой перпендикулярно полю, одинаковая в среде и в полости. Напряженность поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем электрическую или магнитную индукцию в веществе.

Совсем факультативная вставка.

Рассмотрим полость в форме шара. Электрическое поле.

Пусть:

\vec{E}_0 — напряженность электрического поля вдали от полости.

Придумаем, что $\vec{E}_1 = \overline{const}$ — напряженность однородного электрического поля внутри полости.

Придумаем, что поле снаружи полости $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$, где

$\vec{E}_p = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$ — напряженность электрического поля точечного диполя

расположенного в центре полости.

Проверим, что придуманное поле удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon E_{2n} - E_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

Подставим

$$\begin{cases} E_{1n} = E_1 \cos(\theta) \\ E_{1\tau} = E_1 \sin(\theta) \\ E_{2n} = E_0 \cos(\theta) + 3 \frac{p \cos(\theta)}{R^3} - \frac{p \cos(\theta)}{R^3} = E_0 \cos(\theta) + 2 \frac{p \cos(\theta)}{R^3} \\ E_{2\tau} = E_0 \sin(\theta) - \frac{p \sin(\theta)}{R^3} \end{cases}$$

в два следующих равенства

$$\begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

и после сокращения первого равенства на $\cos(\theta)$, а второго — на $\sin(\theta)$,

получим

$$\begin{cases} E_1 = \varepsilon E_0 + 2\varepsilon \frac{p}{R^3} \\ E_1 = E_0 - \frac{p}{R^3} \end{cases}.$$

Откуда

$$E_1 = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_0 \quad \text{и} \quad p = -\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1} R^3 E_0.$$

Аналогично для магнитного поля:

$$H_1 = \frac{3\mu}{1+2\mu} H_0, \quad m = -\frac{\mu-1}{2\mu+1} R^3 H_0 \quad \text{и} \quad B_1 = \frac{3}{1+2\mu} B_0$$

Конец совсем факультативной вставки.

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды.

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ — определение χ_m — магнитной восприимчивости среды.

Аналогично $\vec{P} = \chi \vec{E}$ для электрического поля.

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ — определение μ — магнитной проницаемости среды.

Аналогично $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ для электрического поля.

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = \vec{H} + 4\pi \chi_m \vec{H} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$\mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad \text{аналогично} \quad \varepsilon = 1 + 4\pi \chi.$$

В системе СИ:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad \mu = 1 + \chi_m$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \varepsilon = 1 + \chi$$

Связанные токи обычно присутствуют только на поверхности намагниченной среды.

$$\vec{j}' = c \cdot \text{rot}(\vec{M}) = c \cdot \text{rot}(\chi_m \vec{H})$$

Если магнетик однородный, то магнитную восприимчивость χ_m можно вынести за знак производной везде, кроме точек границы магнетика. Вынесем χ_m за знак ротора и получим

$$\vec{j}' = c \cdot \chi_m \cdot \text{rot}(\vec{H}) = c \cdot \chi_m \cdot \frac{4\pi}{c} \vec{j} = 4\pi \chi_m \vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{j}' = 4\pi \chi_m \vec{j}$$

Если в объеме намагниченной среды нет токов проводимости \vec{j} , то нет и связанных токов \vec{j}' . Поэтому связанные токи обычно протекают только по поверхности намагниченной среды.

Два способа вычисления векторного потенциала A магнитного поля, создаваемого намагниченной средой.

Можно считать, что вещества нет, а связанные токи висят в вакууме, тогда

$$d\vec{A} = \frac{\vec{j} \cdot dV}{cr} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{j}'(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{c} \int_{S'} \frac{\vec{i}'(\vec{r}') \cdot dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Здесь в правой части равенства обычно отлично от нуля только второе слагаемое, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика.

Можно считать, что вещества нет, а магнитные диполи висят в вакууме, тогда

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{[\vec{M}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Факультативная вставка.

Интегралы для векторного потенциала, как и для потенциала, создаваемого поляризованным диэлектриком, содержат интегрируемую особую точку $\vec{r} - \vec{r}' = 0$. Особенность интегрируемая, так как ее можно устранить заменой переменной интегрирования \vec{r}' на $\vec{r}_0 = \vec{r}' - \vec{r}$.

Конец факультативной вставки.

Два способа вычисления магнитного поля \vec{B} , создаваемого намагниченной средой.

Первый способ. Можно считать, что вещества нет, а связанные токи висят в вакууме, тогда

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \quad \Rightarrow$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{[\vec{j}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \frac{1}{c} \oint_{S'} \frac{[\vec{i}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

Здесь отличен от нуля обычно только второй интеграл, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика. Вторым интеграл имеет неинтегрируемую особую точку, если точка вычисления магнитного поля находится на поверхности со связанными токами. На такой поверхности поле \vec{B} испытывает скачок и не имеет определенного значения, так как магнитное поле испытывает скачок на токонесущей поверхности.

Второй способ. Можно считать, что вещества нет, а магнитные диполи висят в вакууме, тогда

$$\vec{B} = 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3} \pi \vec{m} \delta(\vec{r}) \quad \Rightarrow$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{V'} \left\{ 3 \frac{(\vec{M}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV' + \frac{8}{3} \pi \vec{M}(\vec{r})$$

Здесь интегралы нужно понимать в смысле главного значения. Подробнее смотрите аналогичный вопрос для электрического поля.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi \vec{M}(\vec{r})$$

Третий способ вычисления магнитного поля намагниченной среды.

Третий способ вычисления магнитного поля — найти напряженность магнитного поля \vec{H} магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

Магнитное поле, создаваемое намагниченной средой, во всех отношениях такое, как будто оно создано магнитными зарядами.

По аналогии с электрическим полем можно построить и теорию магнитного поля:

$$\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = q_m \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= q\vec{l} & \Rightarrow & & \vec{m} &= q_m\vec{l} \\ \vec{P} &= \frac{d\vec{p}}{dV} & \Rightarrow & & \vec{M} &= \frac{d\vec{m}}{dV} \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} & \Rightarrow & & \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M} \end{aligned}$$

На самом деле магнитное поле создается токами, а не зарядами, именно поэтому при усреднении внутриатомного магнитного поля получается поле \vec{B} , а не поле \vec{H} .

Третий способ вычисления магнитного поля \vec{B} имеет следующий алгоритм: $\vec{M} \rightarrow \sigma'_m \rightarrow \vec{H} \rightarrow \vec{B}$.

Здесь $M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m$ аналогично $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ для диэлектриков.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \oint_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma'_m(\vec{r}') \cdot dS'$$

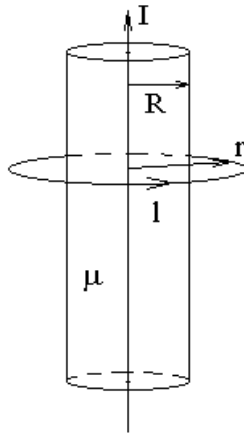
$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}.$$

Примеры решения задач с магнетиками.

1. Магнитное поле длинного провода с током в цилиндрической оболочке из магнитного материала.

$$\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_r + \vec{B}_z$$

$$H_\varphi = ?$$



$$\left\{ \begin{aligned} \oint_l H_l dl &= \frac{4\pi}{c} I \\ H_l &= H_\varphi \end{aligned} \right. \Rightarrow H_\varphi l = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow 2\pi r \cdot H_\varphi = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow$$

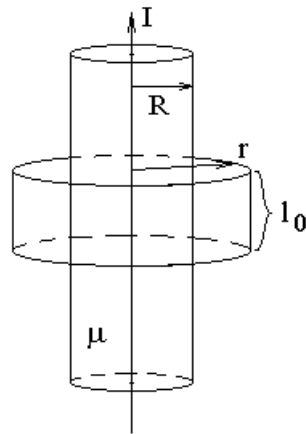
$$H_\varphi = \frac{2I}{cr}. \text{ Тогда с учетом } \vec{B} = \mu\vec{H} \text{ получим}$$

$$B_\varphi = \mu \frac{2I}{cr} \text{ при } r < R \quad \text{и} \quad B_\varphi = \frac{2I}{cr} \text{ при } r > R$$

Докажем, что двух других составляющих магнитного поля нет.

$$B_r = ?$$

Рассмотрим поток поля \vec{B} через поверхность цилиндра, положение которого соответствует симметрии задачи.



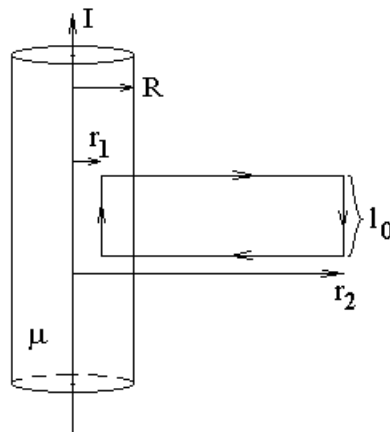
Поток поля \vec{B} может создавать только составляющая B_r . Эта составляющая может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

$$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r S = 2\pi r l_0 \cdot B_r$$

Поток поля \vec{B} через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$, следовательно, $B_r = 0$.

 $H_z = ?$

Рассмотрим циркуляцию поля \vec{H} по прямоугольному контуру, в плоскости которого лежит провод с током.



$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$$

Правая часть равенства равна нулю, так как нет токов проводимости, пронизывающих контур интегрирования.

В левую часть равенства в циркуляцию магнитного поля дают вклад только вертикальные отрезки контура, так как горизонтальные отрезки направлены радиально, а радиальная составляющая магнитного поля равна нулю $B_r = 0$.

Вклад в циркуляцию на вертикальном отрезке равен произведению вертикальной составляющей магнитного поля на длину вертикального отрезка l_0 . На левом вертикальном отрезке $H_l = H_z$, а на правом отрезке $H_l = -H_z$. Тогда

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad H_l(r_1) \cdot l_0 + H_l(r_2) \cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$H_z(r_1) \cdot l_0 - H_z(r_2) \cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z(r) = \text{const}$$

$$\text{Но } H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \text{ тогда } H_z(r) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$B_z = 0.$$