Потенциал произвольного распределения зарядов.

Для системы точечных зарядов q_i получим следующее выражение для потенциала φ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{W'(\vec{r})}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Тогда для произвольного распределения зарядов получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')\,dS'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int_{l'} \frac{\tau(\vec{r}\,')\cdot dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}$$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$ — потенциал поля точечного заряда.

В системе СГС Гаусса $\varphi = \frac{q}{r}$.

Связь потенциала и напряженности электростатического поля.

$$\varphi(\vec{r}_I) \equiv \frac{W'(\vec{r}_I)}{q'} \equiv \frac{A'_{I\to\infty}}{q'} = \frac{\int_I^\infty (\vec{F}\,', d\vec{l})}{q'} = \int_I^\infty \left(\frac{\vec{F}\,'}{q'}, d\vec{l}\right) = \int_I^\infty (\vec{E}, d\vec{l}) \quad =>$$

$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^\infty (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{\vec{r}}^\infty E_l dl$ — связь потенциала и напряженности в одну сторону.

Получим теперь связь между $\vec{E}$ и φ в другую сторону.

Рассмотрим

$$\varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) = \int_{\vec{r}_{II}}^\infty E_l dl - \int_{\vec{r}_I}^\infty E_l dl = -\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl.$$

Устремим $\vec{r}_{II} \to \vec{r}_I$ и получим:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) \approx d\varphi \\ -\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl \approx -E_l dl \end{array}\right\} \quad => \quad d\varphi = -E_l dl \quad =>$$

$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ — для любого направления l.

Рассмотрим направления вдоль осей x, y, z:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \qquad =>$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \qquad =>$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, где

$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \dfrac{\partial}{\partial z}$ — оператор набла.

$grad\left(\varphi\right) \equiv \vec{\nabla} \varphi$ — определения градиента.

$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \\ \varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \end{cases}$ — связь напряженности и потенциала в обе стороны.

<u>Связь силы и потенциальной энергии для любых потенциальных полей.</u>

$\varphi \equiv \dfrac{W'}{q'}$ и $\vec{E} \equiv \dfrac{\vec{F}'}{q'}$ и из $\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ мы получили $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$.

Тогда, повторив выкладки, из равенства $W\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right)$ мы получим $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$. То есть, если $W\left(\vec{r}\right)$ — это энергия или способность совершить работу при перемещении из точки $\vec{r}$ на бесконечность, то сила может быть выражена через энергию по формуле $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$.

Можно доказать и в обратную сторону, что из равенства $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ следует $W\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right)$. И действительно, рассмотрим интеграл:

$$-\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = -\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\vec{\nabla} W, d\vec{l}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{\nabla} W\right)_l dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial l} \cdot dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} dW = W\Big|_{\vec{r}}^{\infty} = -W\left(\vec{r}\right)$$

То есть, если для силы $\vec{F}$ удалось подобрать такую функцию W, что $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$, то сила — потенциальна, а W — потенциальная энергия, соответствующая этой силе. Подробнее, почему $\left(\vec{\nabla} W\right)_l = \dfrac{\partial W}{\partial l}$, смотри в следующем вопросе.

Физический смысл градиента.

Покажем, что проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.

Градиент произвольной функции, например, φ равен $\vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Проекция градиента на направление оси x — это коэффициент при единичном векторе $\vec{i}$ вдоль оси x, то есть $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ось x можно направить произвольно вдоль любого направления l, следовательно, проекция градиента $\vec{\nabla}\varphi$ на произвольное направление l равна $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$.

Итак, проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению. Проекция максимальна на направление самого вектора. Следовательно, производная по направлению максимальна в направлении самого вектора градиента. То есть направление градиента — это направление, в котором максимальна производная по направлению, то есть направление, в котором функция быстрее всего возрастает.

Градиент как вектор показывает направление, в котором функция быстрее всего возрастает, а длина вектора градиента равна производной от функции по этому направлению.

Дивергенция.

$$div\left(\vec{A}\right) \equiv \left(\vec{\nabla},\vec{A}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Теорема Гаусса — Остроградского.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int\limits_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV = \oint\limits_S \left(\vec{A},d\vec{S}\right)$$

Здесь $\oint\limits_S \left(\vec{A},d\vec{S}\right) \equiv \Phi_A$ — поток произвольного векторного поля $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S, которая ограничивает объем V. При вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int\limits_a^b f\,'dx = f\left(b\right) - f\left(a\right)$$

$$\int\limits_V \left(\vec{\nabla},\vec{A}\right)\cdot dV = \oint\limits_S \left(\vec{A},d\vec{S}\right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

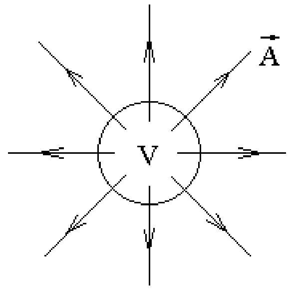
Физический смысл дивергенции.

Рассмотрим малый объем V:

$$\int_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV \approx div\left(\vec{A}\right)\cdot\int_V dV = V\cdot div\left(\vec{A}\right) \quad =>$$

$$div\left(\vec{A}\right) \approx \frac{\int_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV}{V} = \frac{\oint_S\left(\vec{A},d\vec{S}\right)}{V} = \frac{\Phi_A}{V} \quad =>$$

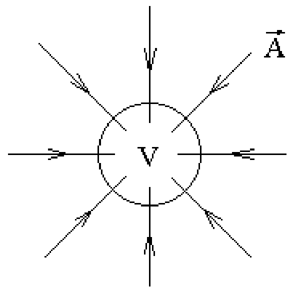
Физический смысл дивергенции: дивергенция — объемная плотность потока. Но поток — это сколько линий поля протекает. Тогда, если



,

то поток положительный $\Phi_A > 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) > 0$.

Если же



то поток отрицательный $\Phi_A < 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) < 0$.

Дивергенция — производная во все стороны.

Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме.

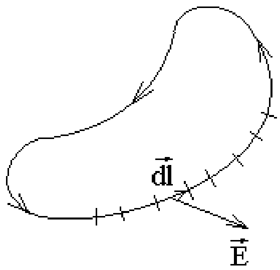
$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Big|\cdot\frac{1}{V} \qquad => \qquad \frac{\Phi_E}{V} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{V} \quad \Big| V\to 0 \qquad =>$$

$$div\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

В системе СГС Гаусса: $\quad div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho$

Теорема о циркуляции электростатического поля E.

$\Gamma_E \equiv \oint_l\left(\vec{E},d\vec{l}\right) = \oint_l E_l dl$ — определение циркуляции поля $\vec{E}$.



Для вычисления циркуляции по контуру или по замкнутой линии эту замкнутую линию нужно разбить на большое число малых отрезков. Каждому отрезку соответствует вектор $d\vec{l}$. В области отрезка электрическое поле $\vec{E}$ почти постоянно. Для каждого отрезка нужно вычислить $\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ и просуммировать соответствующие величины по замкнутому контуру.

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру:

$$\Gamma_E \equiv \oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \oint_l \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint_l \left(\vec{F}', d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint_l dA' = \frac{1}{q'} A'_{I\to I}$$

Работу по перемещению заряда по замкнутому контуру $A_{I\to I}$ можно найти из выражения для работы по перемещению из точки I в точку II:

$$A'_{I\to I} = A'_{I\to II}\Big|_{II\to I} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q' \sum_i q_i \left(\frac{1}{\left|\vec{r}_I - \vec{r}_i\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_{II} - \vec{r}_i\right|}\right)\Bigg|_{II\to I} = 0 \qquad =>$$

$\Gamma_E = 0$ или, что то же самое, $\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0$ — теорема о циркуляции электростатического поля.

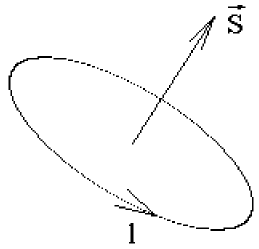
Ротор.

$$rot\left(\vec{A}\right) \equiv \left[\nabla, \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Теорема Стокса.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \oint_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right),$$



Направление нормали к поверхности при вычислении потока и направление обхода контура при вычислении циркуляции образуют правый винт.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int_a^b f'dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_S \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right], d\vec{S} \right) = \oint_l \left(\vec{A}, d\vec{l} \right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.