Первый академический час — лекционные демонстрации.

Два способа вычисления электростатического потенциала φ, создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление потенциала связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$ и получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \int\limits_{V'} \frac{\rho'(\vec{r}\,') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \oint\limits_{S'} \frac{\sigma'(\vec{r}\,') \cdot dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right\}$$

В системе СГС Гаусса без множителя $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

2-ой способ — вычисление потенциала молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$ и получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V'} \frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$$

В системе СГС Гаусса без множителя $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Оба интегральных выражения для потенциала имеют особую точку при условии $\vec{r}\,' = \vec{r}$, в которой знаменатель подынтегральных выражений обращается в ноль. Эта особая точка является интегрируемой особенностью. И действительно, если сделать замену переменной интегрирования $\vec{r}\,'$ на переменную $\vec{r}_0 = \vec{r}\,' - \vec{r}$, то в окрестности особой точки получим:

$$dV' = 4\pi r_0^2 dr_0 \quad \text{и} \quad dS' = 2\pi r_0 dr_0 .$$

Тогда после сокращения r_0 в знаменателе и числителе подынтегральных выражений особая точка пропадает. В этом смысле рассматриваемая особая точка — интегрируемая особая точка.

Два способа вычисления электростатического поля *E*, создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление напряженности поля связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3}$ и получим:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \int\limits_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \rho'(\vec{r}\,') \cdot dV' + \oint\limits_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \sigma'(\vec{r}\,') \cdot dS' \right\}$$

(в системе СГС Гаусса множитель $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ нужно убрать).

Особая точка в интеграле по объему — интегрируемая особенность, которая пропадает при замене переменной интегрирования, а особая точка в интеграле по поверхности — это неинтегрируемая особенность. Причина этого в том, что при условии $\vec{r}\,'=\vec{r}$ точка наблюдения находится на поверхности со связанными зарядами, а напряженность поля $\vec{E}$ испытывает скачок при переходе через заряженную поверхность. То есть, поле $\vec{E}$ не имеет определенного значения на заряженной поверхности диэлектрика.

2-ой способ — вычисление напряженности поля молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}-\frac{4}{3}\pi\cdot\vec{p}\cdot\delta(\vec{r})\right\}$, заменим здесь $\vec{r}\to(\vec{r}-\vec{r}\,')$ и $\vec{p}\to\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot dV'$, просуммируем поле $\vec{E}$ по диполям всего объема $\int\limits_{V'}\bullet$ и получим поле $\vec{E}$ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5}-\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right)\cdot dV'-\frac{1}{3\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot dV'$$

$$\Rightarrow\quad \vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5}-\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right)\cdot dV'-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}(\vec{r})$$

(в системе СГС Гаусса нужно умножить на $4\pi\varepsilon_0$).

Здесь интеграл содержит неинтегрируемую в обычном смысле особую точку. Но интеграл по объему имеет определенное значение, если рассматривать интеграл в смысле главного значения. В окрестности особой точки мысленно вырезают шар с малым радиусом r_0 и с центром в особой точке. В объеме без этого шара интеграл берется и имеет определенное значение. Интеграл в смысле главного значения — это предел, к которому стремится интеграл по объему без шара при стремлении радиуса шара к нулю.

<u>Вектор электрической индукции или электрического смещения.</u>

$\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ — определение вектора электрической индукции или электрического смещения.

В СГС Гаусса: $\vec{D}\equiv\vec{E}+4\pi\vec{P}$.

Рассмотрим дивергенцию поля $\vec{D}$:

$$div\left(\vec{D}\right)=div\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=\varepsilon_0 div\left(\vec{E}\right)+div\left(\vec{P}\right)=(\rho+\rho')+(-\rho')=\rho\quad\Rightarrow$$

$$div\left(\vec{D}\right)=\rho.$$

Аналогичные выражения можно получить в интегральной форме $\Phi_D=Q$ и для границы раздела сред $D_{2n}-D_{1n}=\sigma$. Здесь величины ρ,Q,σ относятся только к свободным зарядам.

В системе СГС Гаусса: $div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho$.

Четыре основных формулы для диэлектриков в трех формах:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = Q \\ div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \\ div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \dfrac{Q + Q'}{\varepsilon_0} \\ div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0} \\ E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

В этих формулах, как и обычно, нормаль к границе раздела направлена из объема 1 в объем 2: $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right) \\ div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} \end{cases}$.

<u>**Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость среды.**</u>

Связь величин $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не всегда линейна, но для линейной связи можно ввести диэлектрическую восприимчивость среды.

$\vec{P} \equiv \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ — определение χ — диэлектрической восприимчивости среды.

В системе СГС Гаусса: $\vec{P} \equiv \chi \vec{E}$.

В кристаллах χ — матрица или тензор второго ранга.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad P_i = \varepsilon_0 \sum_k \chi_{ik} E_k .$$

Тензор диэлектрической восприимчивости — симметричный тензор (без доказательства):

$\chi_{ik} = \chi_{ki}$.

$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ — определение ε — диэлектрической проницаемости среды.

$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi\right) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ =>

$\varepsilon = 1 + \chi$ — связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости среды.

$\chi = \varepsilon - 1$, откуда $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\vec{E}$

$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, так как $\chi_{ik} = \chi_{ki}$

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \\ \vec{P} = \chi \vec{E} \\ \varepsilon = 1 + 4\pi\chi \end{cases}$.

С<u>вязанные заряды обычно присутствуют только на поверхности диэлектрик</u>а.

$\rho' = -div\left(\vec{P}\right) = -div\left(\varepsilon_0 \chi \vec{E}\right)$

Внутри однородного диэлектрика $\chi = const$ и эту константу можно вынести за знак производной:

$\rho' = -\varepsilon_0 div\left(\chi \vec{E}\right) = -\varepsilon_0 \chi \cdot div\left(\vec{E}\right) = -\chi(\rho + \rho')$ => $\rho' = -\chi(\rho + \rho')$

=> $\rho' = -\dfrac{\chi}{1+\chi}\rho$

Если диэлектрик однородный и в объеме диэлектрика нет свободных зарядов $\rho = 0$, то нет и связанных зарядов $\rho' = 0$.

<u>Алгоритм решения симметричных задач с диэлектриками.</u>

Алгоритм решения задач:

$\Phi_D = Q$ => $DS = Q$ => $D = \dfrac{Q}{S}$ => $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ =>

$\begin{cases} \vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\vec{E} \\ \varphi(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \end{cases}$ => $\sigma' = -(P_{2n} - P_{1n})$