Поляризация неполярных диэлектриков (продолжение).

В системе СГС Гаусса: $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4}{3}\pi n\alpha$.

Здесь n — концентрация молекул, α — поляризуемость одной молекулы.

Концентрация молекул пропорциональна плотности среды $n\sim\tau$, тогда

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=const$$

при изменении плотности диэлектрика величина $\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$ остается постоянной.

Для переменных полей аналогичная формула называется формулой Лоренца — Лоренца (или формулой Лоренц — Лорентца).

Поляризация полярных газообразных диэлектриков.

Молекулы полярных диэлектриков являются жесткими диполями, такими как, например, молекула HCl.

Для этих молекул во внешнем электрическом поле появляется и наведенный диполь, но его величина гораздо меньше величины жесткого диполя, поэтому наведенными диполями мы будем пренебрегать.

Жесткие диполи молекул стремятся к минимуму потенциальной энергии, то есть стремятся повернуться по полю $\vec{E}$, так как энергия диполя $W=-\left(\vec{p},\vec{E}\right)$.

Это с одной стороны, а с другой стороны, тепловые столкновения молекул стремятся разбросать диполи по направлениям случайным образом.

В результате совместного влияния этих двух факторов и происходит поляризация полярных газообразных диэлектриков во внешнем электрическом поле.

Пусть p_0 — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Пусть $d\xi$ — вероятность того, что диполь направлен в телесный угол $d\Omega$.

Согласно распределению Больцмана эта вероятность пропорциональна экспоненте $e^{-\frac{W}{kT}}$. Кроме того она пропорциональна величине телесного угла $d\Omega$. Тогда

$d\xi\sim e^{-\frac{W}{kT}}d\Omega$, где малый телесный угол можно выразить через углы сферической системы координат $d\Omega=\sin\left(\theta\right)\cdot d\theta\cdot d\varphi$. Тогда

$$d\xi\sim e^{-\frac{W}{kT}}\cdot\sin\left(\theta\right)\cdot d\theta\cdot d\varphi$$

С учетом того, что $W<<kT$ (в сильном электрическом поле $W\approx kT$ происходит электрический пробой газа) вместо экспоненты оставим отрезок ряда Тейлора:

$$d\xi \sim \left(1-\frac{W}{kT}\right)\cdot \sin(\theta)\cdot d\theta \cdot d\varphi .$$

Пусть ось z направлена вдоль внешнего электрического поля $\vec{E}$. Задача обладает симметрией относительно поворотов вокруг оси z, поэтому от угла φ ничего не зависит, и суммирование по углу φ дает множитель 2π, который можно включить в некоторую константу A:

$d\xi = A\cdot\left(1-\frac{W}{kT}\right)\cdot \sin(\theta)\cdot d\theta$ — вероятность того, что направление диполя составляет с направлением внешнего электрического поля угол, который лежит в пределах от θ до $\theta + d\theta$.

Константу A можно найти из так называемого условия нормировки $\int d\xi = 1$, которое означает, что сумма всех вероятностей равна единице.

$$1 = \int d\xi = \int_0^{\pi} A\cdot\left(1-\frac{W}{kT}\right)\cdot \sin(\theta)\cdot d\theta .$$

Подставим сюда $W = -\left(\vec{p},\vec{E}\right) = -p_0 E\cdot\cos(\theta)$ и получим

$$1 = \int_0^{\pi} A\cdot\left(1+\frac{p_0 E\cdot\cos(\theta)}{kT}\right)\cdot \sin(\theta)\cdot d\theta = A\int_0^{\pi} \sin(\theta)\cdot d\theta + A\frac{p_0 E}{kT}\int_0^{\pi}\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\cdot d\theta .$$

Второй интеграл равен нулю, а первый равен двойке. Тогда $1 = 2A$ =>

$A = \frac{1}{2}$ =>

$d\xi = \frac{1}{2}\left(1+\frac{p_0 E\cdot\cos(\theta)}{kT}\right)\cdot\sin(\theta)\cdot d\theta$, где $d\xi$ — вероятность того, что направление диполя составляет угол с направлением напряженности поля от θ до $\theta + d\theta$, p_0 — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Найдем поляризацию среды:

$$P = P_E = n\langle p_E\rangle = n\int p_E d\xi = n\int p_0\cos(\theta)d\xi =$$

$$= n\int_0^{\pi} p_0\cos(\theta)\frac{1}{2}\left(1+\frac{p_0 E\cos(\theta)}{kT}\right)\sin(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{np_0}{2}\int_0^{\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta + \frac{np_0^2 E}{2kT}\int_0^{\pi}\cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta .$$

Здесь первый интеграл равен нулю, а второй интеграл равен $\frac{2}{3}$. Тогда

$P = \frac{np_0^2 E}{3kT}$ =>

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \frac{np_0^2}{3kT} \vec{E}$ — поляризация полярных газообразных диэлектриков.

$\chi = \frac{np_0{}^2}{3\varepsilon_0 kT}$ — диэлектрическая восприимчивость среды.

$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$ — диэлектрическая проницаемость среды.

В системе СГСГ: $\chi = \frac{np_0{}^2}{3kT}$, $\vec{P} = \chi \vec{E} = \frac{np_0^2}{3kT} \vec{E}$ и $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT}$.

Заметим, что в отличие от поляризации неполярных диэлектриков поляризация полярных диэлектриков зависит от температуры: $\chi(T)$ и $\varepsilon(T)$.

Диэлектрики с особыми свойствами.

Пьезоэлектрики. Ключевые слова: деформация — электрическое напряжение.

Прямой пьезоэффект — пьезозажигалка. При деформации диэлектрика возникает электрическое напряжение.

Обратный пьезоэффект — пьезокерамика для микроперемещений зеркала лазера и управления его частотой. Под действием электрического напряжения диэлектрик деформируется.

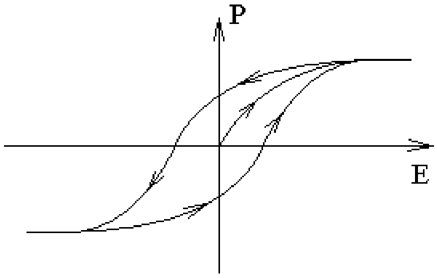
Пироэлектрики. Ключевые слова: теплота — электрическое напряжение.

Прямой пироэлектрический эффект наблюдается в веществах, в которых поляризация есть без воздействия внешнего электрического поля. В пироэлектриках поляризация изменяется при изменении температуры диэлектрика: $\Delta P = \gamma \cdot \Delta T$. При длительном хранении пироэлектрика связанные заряды на его поверхности нейтрализуются свободными зарядами из воздуха: $\sigma' + \sigma = 0$. При изменении температуры компенсация зарядов нарушается и вокруг диэлектрика возникает электрическое поле. Прямой пироэлектрический эффект используется в приемниках электромагнитного излучения, где пирокристалл нагревается излучением. Пирокристалл находится между обкладками конденсатора, с которого снимается электрическое напряжение, пропорциональное изменению температуры и пропорциональное мощности регистрируемого излучения.

Обратный пироэлектрический эффект — при адиабатическом изменении поля $\vec{E}$ изменяется температура диэлектрика.

Сегнетоэлектрики. Ключевое слово: гистерезис — отставание.

Очень похоже на ферромагнетики: спонтанная поляризация, переполяризация электрическим полем, насыщение поляризации, остаточная поляризация. Ферромагнетики позднее будут рассмотрены подробнее.



Факультативная вставка.

Электрострикция — квадратичная по электрическому полю деформация диэлектрика в отличие от линейной по полю деформации пьезоэлектриков.

Электреты — диэлектрики, долго сохраняющие поляризацию без внешнего электрического поля, например, пироэлектреты в нагретом состоянии помещают в электрическое поле и охлаждают.

Антисегнетоэлектрики имеют спонтанно поляризованные элементарные ячейки, направления спонтанной поляризации в которых попарно антипараллельны.

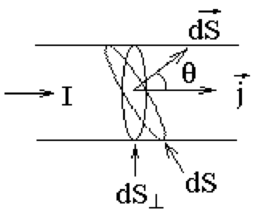
Конец факультативной вставки.

Электрический ток.
Сила тока, плотность тока, плотность поверхностного тока.

$I \equiv \dfrac{dq}{dt}$ — сила тока — это заряд, протекающий в единицу времени.

$j \equiv \dfrac{dI}{dS_\perp}$ — поверхностная плотность объемного тока — сила тока через единичную площадку перпендикулярную току. Для краткости будем говорить: плотность тока.

$i \equiv \dfrac{dI}{dl_\perp}$ — линейная плотность поверхностного тока — сила тока, текущего по поверхности и протекающего через единичный отрезок перпендикулярный току. Для краткости будем говорить: плотность поверхностного тока.



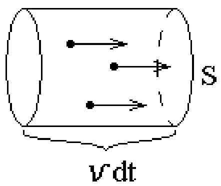
$dI = j \cdot dS_\perp = j \cdot dS \cdot \cos(\theta) = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)$ =>

$dI = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)$ сила тока равна потоку плотности тока

$dI = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = j_n\, dS$ =>

$j_n = \dfrac{dI}{dS}$ — проекция плотности тока на нормаль к площадке.

Рассмотрим объем $dV_0 = V dt \cdot S$, где V — скорость движения зарядов.



$I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{q \cdot dN}{dt} = \dfrac{q \cdot n \cdot dV_0}{dt}$, здесь n — концентрация зарядов, q — величина каждого заряда.

$I = \dfrac{q \cdot n \cdot dV_0}{dt} = \dfrac{qn \cdot V dt \cdot S}{dt} = nqVS$ => $j = \dfrac{I}{S} = nqV$ =>

$\vec{j} = nq\langle\vec{V}\rangle = \rho\langle\vec{V}\rangle$,

где $\vec{j}$ — плотность тока, n — концентрация зарядов, q — величина каждого заряда, $\langle\vec{V}\rangle$ — средняя скорость зарядов, ρ — плотность зарядов.

Уравнение непрерывности или уравнение неразрывности.

Это уравнение следует из закона сохранения заряда.

Рассмотрим силу тока, вытекающего через границу S объема V:

$$\frac{dQ_0}{dt} = I = \oint_S dI = \oint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right).$$

Здесь Q_0 — заряд, который вытекает. Если рассматривать вместо него заряд, который остается в объеме, то производная от заряда по времени поменяет знак. Тогда

$\oint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \dfrac{\partial Q}{\partial t} = 0$ — уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в интегральной форме. Здесь Q — заряд внутри замкнутой поверхности S, частная производная по времени подчеркивает неизменность пространственных координат при дифференцировании по времени.

Разделим это равенство на объем, ограниченный поверхностью S и устремим объем к нулю. Тогда получим

$div\left(\vec{j}\right) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ — уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в дифференциальной форме.

Факультативная вставка.

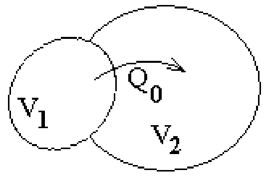
$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{V}\right) = 0$ — уравнение неразрывности для газа, где ρ — плотность газа.

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Как было отмечено выше, если рассматривать вместо вытекающего из объема V_1 заряд, который остается в объеме, то производная от заряда по времени поменяет знак. Этот результат связан с законом сохранения заряда. Обсудим эту связь подробнее.

Обозначим область, в которую вытекают заряды, как объем V_2.



За границы объема $V_1 + V_2$ заряды не вытекают. Следовательно, по закону сохранения заряда в объеме $V_1 + V_2$ заряд сохраняется.

Если Q_1 и Q_2 заряды в объемах 1 и 2, то закон сохранения заряда:

$$Q_1 + Q_2 = const \quad => \quad d\left(Q_1 + Q_2\right) = 0 \quad => \quad \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt},$$

где $Q_0 = \Delta Q_2$ — заряд, который вытекает через границу S_1 объема V_1.

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt} = -\oint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) \quad =>$$

$$\oint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \frac{dQ_1}{dt} = 0$$

Теперь в этом выражении можно опустить индекс 1. Тогда

$\oint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ — уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в интегральной форме. Здесь Q — заряд внутри замкнутой поверхности S.

Конец факультативной вставки.

Уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в дифференциальной форме:

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Для постоянных токов $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Предполагается, что постоянные токи текли сколь угодно долго, тогда из $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ следует, что плотность заряда, изменяясь линейно во времени, достигает сколь угодно большой величины. Если не рассматривать бесконечные плотности заряда, то нужно считать, что $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Тогда из уравнения неразрывности для постоянных токов получаем

$div\left(\vec{j}\right)=0$

Для постоянных токов в интегральной форме получаем $\Phi_j=0$ — поток плотности тока через замкнутую поверхность равен нулю. Сколько линий плотности тока втекает в объем, столько и вытекает. Поток плотности тока через любую поверхность — это сила тока через эту поверхность.

Линии плотности постоянных токов нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Линии плотности постоянных токов замкнуты.

Закон Ома.

$I \sim U$ — закон Ома. Сила тока через поперечное сечение проводника пропорциональна напряжению, приложенному к его торцам.

$U = RI$ — определение сопротивления проводника R.

Закон Ома выполняется не всегда, например, не выполняется для полупроводникового диода.

Факультативная вставка.

Для диода в направлении отпирания диода с хорошей точностью выполняется следующая связь между током I и напряжением U:

$$I = I_0(T)\cdot\left(\exp\left(\frac{eU}{kT}\right)-1\right),$$

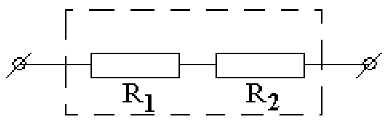
где T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, e — модуль заряда электрона.

Интересно, что зависимость $I_0(T)$ такова, что при постоянном токе через диод и изменении температуры диода напряжение на диоде приблизительно обратно пропорционально абсолютной температуре $U \sim \frac{1}{T}$.

Конец факультативной вставки.

Последовательное и параллельное соединение проводников.

Рассмотрим черный ящик, в котором последовательно соединены два резистора с сопротивлениями R_1 и R_2. Пусть мы не знаем, что внутри два резистора, и думаем, что резистор один. Измеряя напряжение и ток в схеме можно определить величину сопротивления этого резистора.



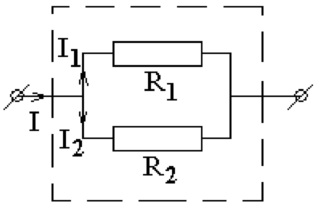
$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I \\ U = U_1 + U_2 \end{cases} \quad => \quad R=\frac{U}{I}=\frac{U_1+U_2}{I}=\frac{U_1}{I}+\frac{U_2}{I}=R_1+R_2 \quad =>$$

$$R = R_1 + R_2$$

Аналогично для большего числа последовательно соединенных резисторов:

$R = \sum_i R_i$ — при последовательном соединении резисторов их сопротивления складываются.

Рассмотрим теперь черный ящик, в котором два резистора соединены параллельно:



$$\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Аналогично для большего числа параллельно соединенных резисторов:

$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ — при параллельном соединении резисторов их проводимости складываются.

Проводимость — величина обратная сопротивлению.

<u>**Удельное сопротивление и удельная проводимость.**</u>

Рассмотрим длинный цилиндрический проводник, к торцам которого приложено электрическое напряжение. По проводнику течет ток.

Теперь соединим последовательно два таких проводника. Сопротивление удвоится, так как при последовательном соединении резисторов сопротивления складываются. Длина проводника тоже удвоится. Если последовательно соединить три проводника, то сопротивление и длина утроятся и так далее.

Следовательно, сопротивление цилиндра пропорционально его длине:

$R \sim l$.

Рассмотрим цилиндрический проводник с прямоугольным поперечным сечением. К торцам цилиндра приложим электрическое напряжение. По проводнику потечет ток.

Если мы соединим параллельно два таких проводника, то проводимость удвоится, так как при параллельном соединении резисторов проводимости складываются. При этом токи не будут перетекать из одного проводника в другой параллельный ему, так как оба проводника равноправны. Площадь поперечного сечения суммарного проводника тоже удвоится. Если параллельно соединить три проводника, то проводимость и площадь поперечного сечения утроятся и так далее.

Следовательно, проводимость цилиндра пропорциональна площади его поперечного сечения:

$$\frac{1}{R} \sim S \quad => \quad R \sim \frac{1}{S}.$$

$$\begin{cases} R \sim l \\ R \sim \dfrac{1}{S} \end{cases} \quad => \quad R \sim \frac{l}{S}.$$

Равенство $R = \rho\frac{l}{S}$ является определением удельного сопротивления ρ. Здесь R — сопротивление проводника, l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения проводника.

Величина удельного сопротивления не зависит от размеров и формы проводника, а зависит только от его материала.

$\lambda \equiv \frac{1}{\rho}$ — определение удельной проводимости материала.

Закон Ома в дифференциальной форме.

$$R = \rho\frac{l}{S} \quad => \quad U = RI = \rho\frac{l}{S}I \quad => \quad \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{U}{l} \quad => \quad j = \lambda E$$

$\vec{j} = \lambda\vec{E}$ — закон Ома в дифференциальной форме. Здесь $\vec{j}$ — плотность тока, $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, λ — удельная проводимость.

Сторонние силы.

$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ — уравнение неразрывности.

Для постоянных токов $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad => \quad div\left(\vec{j}\right) = 0 \quad =>$

$\Phi_j = 0$ — поток плотности постоянных токов через любую замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно, линии постоянных токов замкнуты.

Рассмотрим интеграл $\oint\limits_l E_l dl$ вдоль замкнутой линии тока.

$$d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j} = \lambda\vec{E} \quad => \quad \vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{l} \quad => \quad \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) > 0 \quad => \quad \oint\limits_l E_l dl > 0$$

Это с одной стороны, а с другой стороны $\oint\limits_l E_l dl = 0$, согласно теореме о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$. Казалось бы, для постоянных токов поле $\vec{E}$ нельзя считать электростатическим. Однако $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ и это означает, что заряды не изменяются. При постоянных токах распределение зарядов неизменно. При неизменном распределении зарядов их поле — электростатическое поле.

Итак, мы получили противоречие $\begin{cases} \oint\limits_l E_l dl > 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \end{cases}$. Это противоречие доказывает, что для существования постоянных токов необходимо наличие неэлектрических посторонних сил. Эти силы будем называть сторонними силами $\vec{F}_{стор}$.

$\vec{E}_{стор} \equiv \dfrac{\vec{F}_{стор}}{q}$ определение напряженности сторонних сил.

Электрические силы и сторонние силы должны одинаково вызывать движения зарядов — электрический ток. Тогда, обобщая закон Ома, получим:

$\vec{j} = \lambda\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор}\right)$ — обобщенный закон Ома или закон Ома с учетом сторонних сил в дифференциальной форме.