

**Формула для одной из составляющих магнитного поля поверхностного тока (продолжение).**

С учетом того, что  $\vec{r}_n \perp \vec{i}$ , получим

$$dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dS}{r^3} r_n i = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r_n dS}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{(\vec{r}, d\vec{S})}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{r \cdot dS_{\perp \vec{r}}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dS_{\perp \vec{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\Omega.$$

$dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\Omega$ , где  $d\Omega$  — телесный угол, под которым поверхность с

током видна из точки наблюдения поля  $\vec{B}$ ;  $\vec{B}_{\perp}$  — составляющая магнитного

поля такая, что  $\begin{cases} \vec{B}_{\perp} \perp \vec{i} \\ \vec{B}_{\perp} \perp \vec{n} \end{cases}$ , где  $\vec{i}$  — плотность поверхностного тока,  $\vec{n}$  —

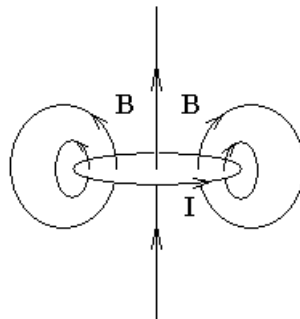
нормаль к поверхности с током. Составляющая  $\vec{B}_{\perp}$  направлена так, что магнитное поле образует правый винт вокруг тока.

В системе СГС Гаусса:  $dB_{\perp} = \frac{i}{c} d\Omega$ .

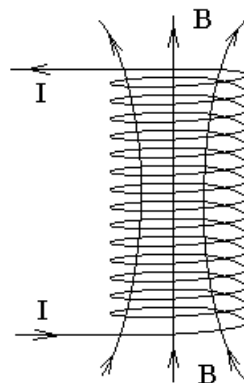
**Магнитное поле внутри бесконечного соленоида.**

Соленоид — это цилиндрическая катушка с проводящей обмоткой. По проводу соленоида пускают электрический ток. Можно сказать, что ток течет по боковой поверхности цилиндра вокруг оси цилиндра.

Рассмотрим магнитное поле круглого витка с током.



Мысленно сложим поля нескольких витков, расположенных один над другим и получим поле соленоида.



Внутри соленоида магнитное поле в основном направлено вдоль оси соленоида.

Линии магнитного поля проходят внутри соленоида вдоль его оси, а возвращаются снаружи соленоида. Снаружи места много, поэтому плотность линий мала, и поле мало.

Для бесконечного соленоида магнитное поле снаружи соленоида равно нулю.

Для любого элемента токонесущей поверхности соленоида оказывается, что составляющая  $\vec{B}_\perp$  такая, что 
$$\begin{cases} \vec{B}_\perp \perp \vec{i} \\ \vec{B}_\perp \perp \vec{n} \end{cases},$$
 направлена вдоль оси соленоида.

$$dB_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\Omega \quad \Rightarrow \quad B_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} i \Omega = B_z, \quad \text{где ось } z \text{ направлена}$$

вдоль оси соленоида.

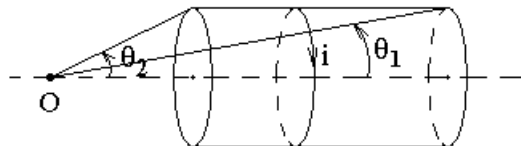
Внутри бесконечного соленоида  $\Omega = 4\pi$  — полный телесный угол (телесный угол во все стороны), так как куда ни помотришь из точки наблюдения поля, взгляд упирается в поверхность с током.

Тогда

$B = \mu_0 i = \mu_0 n I$  — поле внутри бесконечного соленоида, где  $i$  — плотность поверхностного тока соленоида,  $n$  — число витков на единицу длины соленоида,  $I$  — сила тока в одном витке соленоида.

### Магнитное поле на оси соленоида конечной длины.

Найдем магнитное поле в точке  $O$  на оси соленоида с поверхностной плотностью тока  $i = nI$ , где  $n$  — число витков на единицу длины соленоида,  $I$  — сила тока в одном витке.



Здесь  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — угловые радиусы доньшек цилиндра при взгляде из точки  $O$  наблюдения магнитного поля.

Ось соленоида является поворотной осью симметрии задачи. Решение должно обладать этой же симметрией. Тогда на оси симметрии может быть только осевая составляющая магнитного поля.

Для любого элемента поверхностного тока составляющая  $B_\perp$  направлена вдоль оси соленоида. Тогда поле на оси:

$$B = B_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} i \Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} n I \Omega.$$

Найдем телесный угол  $\Omega$ , под которым видна поверхность с током из точки наблюдения магнитного поля.

$$d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta) \cdot d\theta = 2\pi(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$$

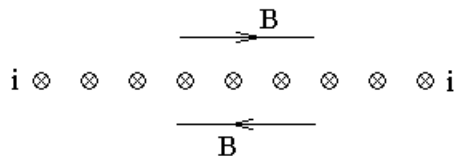
$$\text{Тогда } B = \frac{\mu_0}{4\pi} \Omega n I = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$$

$B = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$  — поле на оси соленоида, где  $n$  — число витков на единицу длины соленоида,  $I$  — сила тока в соленоиде,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — угловые радиусы торцов соленоида при взгляде из точки наблюдения поля.

В системе СГС Гаусса:  $\mu_0 \rightarrow \frac{4\pi}{c}$ .

### Магнитное поле над токонесущей плоскостью.

Магнитное поле закручено вокруг токов по правилу правого винта. В таком случае магнитное поле плоскости с током имеет следующий вид:



Это поле перпендикулярно току и перпендикулярно нормали к поверхности с током. Тогда магнитное поле можно найти по формуле  $dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\Omega$ . Телесный угол, под которым видна бесконечная плоскость с током, равен  $2\pi$ . Тогда

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}, \text{ где поле } \vec{B} \text{ закручено вокруг тока по правилу правого винта,}$$

поле параллельно токонесущей плоскости и в этой плоскости перпендикулярно току.

### Векторный потенциал.

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r} \text{ — векторный потенциал элемента тока } I d\vec{l} \text{ на расстоянии } r$$

от элемента тока.

В системе СГС Гаусса:  $d\vec{A} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{l}}{r}$ .

$$\text{Выражение } d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r} \text{ похоже на выражение } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}, \text{ где } \varphi \text{ —}$$

скалярный потенциал. Поэтому  $\vec{A}$  называют векторным потенциалом, хотя к потенциальной энергии он не имеет отношения.

Рассмотрим  $rot(d\vec{A})$ :

$$\text{rot}(d\vec{A}) = \left[ \vec{\nabla}, \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ \vec{\nabla}, \frac{1}{r} d\vec{l} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ \vec{\nabla} \frac{1}{r}, d\vec{l} \right].$$

Подставим сюда  $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ , что следует из 
$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ и получим} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \end{cases}$$

$$\text{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ \vec{\nabla} \frac{1}{r}, d\vec{l} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ -\frac{\vec{r}}{r^3}, d\vec{l} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ d\vec{l}, \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

Сравним этот результат с законом Био-Савара  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$  и

получим:

$$\text{rot}(d\vec{A}) = d\vec{B} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \text{ — связь магнитного поля } \vec{B} \text{ и векторного потенциала } \vec{A}.$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV'$$

### Потенциалы переменных электромагнитных полей.

Потенциалы переменных электромагнитных полей  $\varphi$  и  $\vec{A}$  определяются равенствами:

$$\begin{cases} \vec{B} \equiv \text{rot}(\vec{A}) \\ \vec{E} \equiv -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \end{cases} \text{ в калибровке Лоренца } \text{div}(\vec{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

$$\text{В СГС Гаусса: } \begin{cases} \vec{B} \equiv \text{rot}(\vec{A}) \\ \vec{E} \equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \end{cases} \text{ в калибровке Лоренца } \text{div}(\vec{A}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Потенциалы зависят от зарядов и токов также как в электростатике  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$  и магнитостатике  $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r}$ , но зависят от зарядов и токов в предшествующий момент времени. Момент времени предшествует на время распространения сигнала  $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$  от источника в точке  $\vec{r}'$  до точки наблюдения  $\vec{r}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ d\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \cdot d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{array} \right.$$

Интересно, что  $\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$  — 4-х вектор относительно преобразований

Лоренца, так же как  $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

В системе СГС Гаусса 4-х вектор  $\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ .

Подробнее этот вопрос рассмотрен в лекции, которая обозначена как лекция 34 из 30 лекций за прошлый год. На самом деле лекция за 2011 год.

### Дивергенция векторного потенциала.

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = 0$$

При нашем определении векторного потенциала  $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r}$  равенство

$\operatorname{div}(\vec{A}) = 0$  справедливо только для постоянных токов. Формулу нужно знать на экзамене. Доказательство формулы на экзамене знать не нужно.

Это равенство можно доказать только для замкнутых токов. Постоянные токи замкнуты.

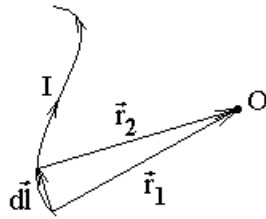
Сначала рассмотрим дивергенцию векторного потенциала для элемента тока, а не для замкнутого контура с током.

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \left( \vec{\nabla}, \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \vec{\nabla}, \frac{1}{r} d\vec{l} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r}, d\vec{l} \right)$$

Подставим сюда  $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ , что следует из

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ и получим} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \end{array} \right.$$

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( -\frac{\vec{r}}{r^3}, d\vec{l} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(\vec{r}, d\vec{l})}{r^3}$$



Из рисунка видно, что

$$\vec{r}_1 = d\vec{l} + \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad d\vec{l} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -d\vec{r}$$

Подставим это в выражение для  $\operatorname{div}(d\vec{A})$  и получим

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(\vec{r}, d\vec{r})}{r^3}$$

Рассмотрим

$$d(\vec{r}, \vec{r}) = (d\vec{r}, \vec{r}) + (\vec{r}, d\vec{r}) = 2(\vec{r}, d\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad (\vec{r}, d\vec{r}) = \frac{1}{2} d(\vec{r}, \vec{r})$$

Подставим это в выражение для  $\operatorname{div}(d\vec{A})$  и получим

$$\operatorname{div}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\frac{1}{2} d(\vec{r}, \vec{r})}{r^3} = \frac{\mu_0}{8\pi} I \frac{d(r^2)}{r^3} = \frac{\mu_0}{8\pi} I \frac{2rdr}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dr}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\left(\frac{1}{r}\right).$$

Теперь от рассмотрения одного элемента тока перейдем к рассмотрению замкнутого контура с током.

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \oint_l \operatorname{div}(d\vec{A}) = \oint_l \left( -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\left(\frac{1}{r}\right) \right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l d\left(\frac{1}{r}\right)$$

Заметим, что для любой функции координат  $(\cdot)$  криволинейный интеграл второго рода  $\oint_l d(\cdot) = 0$  равен нулю, тогда

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = 0.$$

### Уравнение Пуассона для векторного потенциала.

Из электростатики мы знаем, что для любой функции координат  $\varphi$ , которую можно представить в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Из первого равенства следует второе. Заменяем в этих двух равенствах и во всех выкладках между ними

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow \vec{A} \\ \rho \rightarrow \epsilon_0\mu_0\vec{j} \end{cases} \text{ и получим что для любой функции координат } \vec{A}, \text{ которую}$$

можно представить в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}.$$

Таким образом, получаем

$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$  — уравнение Пуассона для векторного потенциала. Формулу без доказательства нужно знать на экзамене.

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Заметим, что для каждой проекции векторного потенциала получается уравнение аналогичное уравнению электростатики  $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Следовательно,

найти векторный потенциал можно, решив три задачи электростатики с плотностями зарядов:  $\epsilon_0\mu_0 j_x$ ,  $\epsilon_0\mu_0 j_y$  и  $\epsilon_0\mu_0 j_z$ . Хотя обычно так никто не поступает.

### Дивергенция магнитного поля $B$ .

$$\text{div}(\vec{B}) = \text{div}(\text{rot}(\vec{A})) = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}])$$

Циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно-векторном произведении не изменяет его величины. Тогда

$$\text{div}(\vec{B}) = (\vec{A}, [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}])$$

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, поэтому

$$[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

Это равенство доказано нами для магнитного поля постоянных токов. Максвелл предположил, что оно справедливо и для переменных электромагнитных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, равенство справедливо и для переменных полей.

