

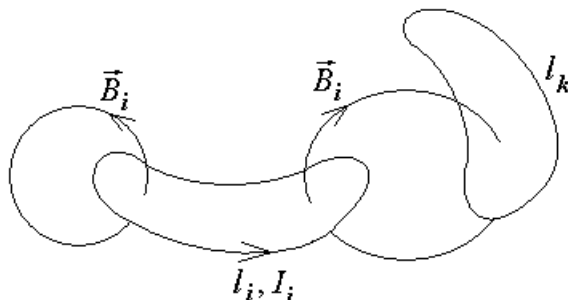
## Лекционные демонстрации (9 минут).

### Коэффициент взаимной индукции.

(в присутствии линейных магнетиков)

Линейность магнетика означает, что связь между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  линейна:  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ .

Рассмотрим систему контуров и два контура из этой системы  $l_i$  и  $l_k$ .



Пусть в контуре  $l_i$  протекает ток  $I_i$ . Ток создает магнитное поле  $\vec{B}_i$ . Это поле пронизывает контур  $l_k$ .

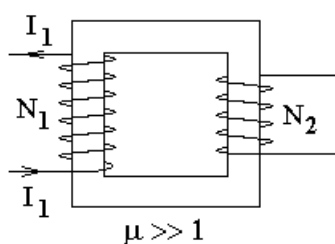
Пусть  $\Phi_{ki}$  — поток магнитного поля  $\vec{B}_i$  через контур  $l_k$ .

$$\Phi_{ki} \sim B_i \sim I_i \quad \Rightarrow$$

$\Phi_{ki} = L_{ki} I_i$  — определение коэффициента взаимной индукции  $L_{ki}$ .

В системе СГС Гаусса:  $\Phi_{ki} = L_{ki} \frac{I_i}{c}$ .

### Коэффициент взаимной индукции двух катушек на общем сердечнике при $\mu \gg 1$ .



Найдем коэффициент взаимной индукции  $L_{21}$ .

Схема решения задачи:  $I_1 \rightarrow H_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{21} \rightarrow L_{21}$ .

Коэффициент взаимной индукции  $L_{21}$  не зависит от величин токов в обеих обмотках.

Пусть в первичной обмотке протекает ток  $I_1$ . Будем считать, что во вторичной обмотке тока нет. В линейном магнетике каждый ток создает свое магнитное поле независимо от других токов. Нас интересует магнитное поле, создаваемое только током  $I_1$ .

Рассмотрим теорему о циркуляции напряженности магнитного поля

$$\oint_l H_l dl = I$$

для контура интегрирования вдоль оси сердечника. Поле  $H$  во всех сечениях сердечника примерно одинаково и направлено по оси сердечника, поэтому для сердечника длиной  $l$  получим:

$$Hl = N_1 I_1 \Rightarrow H = \frac{N_1 I_1}{l} \Rightarrow B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu N_1 I_1}{l}$$

Поток магнитного поля через поперечное сечение сердечника  $\Phi = BS$  равен потоку через один виток любой обмотки. Тогда поток через вторичную обмотку:

$$\Phi_{21} = BS \cdot N_2 = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l} I_1.$$

С учетом определения коэффициента взаимной индукции  $\Phi_{21} = L_{21} I_1$  получим

$$L_{21} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l}$$

Заметим, что  $L_{21} = L_{12}$ .

В системе СГС Гаусса:  $\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$      $B = \mu H$      $\Phi_{21} = L_{21} \frac{I_1}{c}$      $L_{21} = \frac{4\pi \mu N_1 N_2 S}{l}$

### **Теорема о равенстве коэффициентов взаимной индукции.**

(теорема о взаимности)

$$L_{ki} = L_{ik}$$

Докажем это равенство только для токов в вакууме без магнетиков, хотя это равенство справедливо и в присутствии магнитных сред.

Заметим, что равенство  $C_{ki} = C_{ik}$  тоже называют теоремой о взаимности.

Получим некоторое равенство для потока магнитного поля через площадку  $S$ , равенство, которое нам понадобится и в других вопросах.

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B}, d\vec{S})$$

Подставим сюда  $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$  и получим

$$\Phi_B = \int_S (\text{rot}(\vec{A}), d\vec{S}).$$

По теореме Стокса  $\int_S (\text{rot}(\vec{A}), d\vec{S}) = \oint_l (\vec{A}, d\vec{l})$ , тогда

$$\Phi_B = \oint_l (\vec{A}, d\vec{l}), \text{ где } l \text{ — контур, ограничивающий площадку } S, \text{ через}$$

которую проходит поток  $\Phi_B$ . Это равенство нам понадобится сейчас и далее.

Рассмотрим теперь поток  $\Phi_{ki}$  магнитного поля, который создает ток в  $i$ -ом контуре через  $k$ -ый контур:

$$\Phi_{ki} = \oint_{l_k} (\vec{A}_i, d\vec{l}_k)$$

Подставим сюда определение векторного потенциала  $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l}}{r}$  и получим

$$\Phi_{ki} = \oint_{l_k} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_i} \frac{I_i d\vec{l}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}, d\vec{l}_k \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \oint_{l_k} \oint_{l_i} \frac{(d\vec{l}_i, d\vec{l}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} = L_{ki} I_i \quad \Rightarrow$$

$$L_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_k} \oint_{l_i} \frac{(d\vec{l}_i, d\vec{l}_k)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}.$$

При перестановке индексов  $i \leftrightarrow k$  правая часть равенства не изменяется, следовательно, не изменяется и левая часть. То есть  $L_{ki} = L_{ik}$ , что и требовалось доказать.

Факультативная вставка.

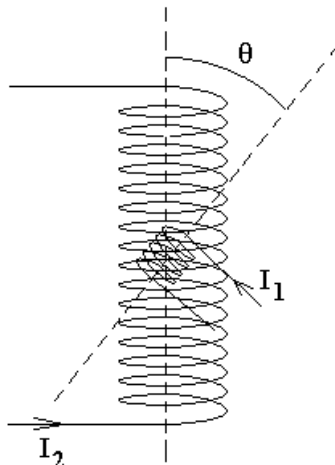
Я не знаю, как доказать равенство  $L_{ki} = L_{ik}$  при наличии намагниченных сред. Доказательство аналогичное доказательству равенства  $C_{ki} = C_{ik}$  через энергию магнитного взаимодействия системы токов не проходит, так как само выражение для энергии получается с использованием равенства  $L_{ki} = L_{ik}$ .

Если теорему о равенстве коэффициентов взаимной индукции при наличии магнитных сред доказать невозможно, то равенство можно предположить. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом. Следовательно, предположение справедливо.

Конец факультативной вставки.

**Пример решения задачи с помощью теоремы о взаимности.**

Пусть в большой и длинной катушке находится маленькая катушка, параметры катушек заданы, и пусть  $\theta$  — угол между осями катушек. Пусть в маленькой катушке течет ток  $I_1$ . Нужно найти поток магнитного поля через большую катушку.



Найдем  $\Phi_{21}$ .

Если предварительно найти  $L_{21}$ , то поток  $\Phi_{21}$  можно найти по формуле  $\Phi_{21} = L_{21}I_1$ .

Коэффициент взаимной индукции  $L_{21}$  можно найти с помощью теоремы о взаимности  $L_{21} = L_{12}$ .

И действительно. Рассмотрим другую задачу с этими же двумя катушками. Пусть ток  $I_2$  протекает по большой катушке, а не по малой, как в настоящей задаче.

Найдем в этой второй задаче поток магнитного поля через малую катушку.

В большой катушке магнитное поле однородное:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 4\pi = \mu_0 i_2 = \mu_0 n_2 I_2.$$

Поток магнитного поля через один виток маленькой катушки равен  $\Phi = BS \cdot \cos(\theta)$ , тогда поток через всю маленькую катушку

$$\Phi_{12} = N_1 \cdot B_2 S_1 \cdot \cos(\theta) = N_1 \cdot \mu_0 n_2 I_2 \cdot S_1 \cdot \cos(\theta) = L_{12} I_2 \quad \Rightarrow$$

$$L_{12} = \mu_0 S_1 N_1 n_2 \cdot \cos(\theta)$$

Возвращаясь к исходной задаче, получим

$\Phi_{21} = L_{21} I_1 = L_{12} I_1 = \mu_0 S_1 N_1 n_2 \cdot \cos(\theta) \cdot I_1$ , где  $S_1$  — площадь сечения малой катушки,  $N_1$  — число витков в малой катушке,  $n_2$  — число витков на единице длины большой катушки,  $\theta$  — угол между осями двух катушек.

$$\text{В системе СГС Гаусса для потока } \mu_0 \rightarrow \frac{4\pi}{c} \text{ и } \Phi_{21} = 4\pi S_1 N_1 n_2 \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{I_1}{c}.$$

### **Индуктивность или коэффициент самоиндукции.**

По аналогии с определением коэффициента взаимной индукции  $\Phi_{ki} = L_{ki} I_i$  можно ввести коэффициент самоиндукции  $\Phi_{ii} = L_{ii} I_i$ . В этом равенстве рассматривается один  $i$ -й контур, поэтому индекс  $i$  можно опустить. Присутствие других контуров не влияет на величину коэффициента  $L_{ii}$ . Тогда

$\Phi = LI$  — определение индуктивности  $L$  или коэффициента самоиндукции. Нужно знать эту формулу к экзамену, хотя весь вопрос факультативный.

Данное определение индуктивности нестрогое.

Определение нестрогое, так как в большинстве задач непонятно, как именно проходит контур, через который нужно вычислять поток в определении индуктивности. Проблема в том, что если провод тонкий, то индуктивность бесконечна, а если провод толстый, то непонятно, как провести контур, через который нужно вычислять поток магнитного поля. Контур проходит не совсем по оси провода. Например, попробуйте найти индуктивность, которая приходится на единицу длины коаксиального кабеля, если радиус центральной

жилы кабеля нельзя считать нулевым. Как провести контур для расчета индуктивности?

-----

Покажем, что для контура из тонкого провода индуктивность бесконечна.

Дело в том, что вблизи бесконечно тонкого провода проходит бесконечный поток магнитного поля.

Если подойти к проводу очень близко на расстояние гораздо меньшее радиуса кривизны провода, то провод будет казаться прямым. Магнитное поле

на расстоянии  $r$  от прямого провода с током  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

Пусть длина контура  $l_0$ .

Вычислим поток магнитного поля через тонкую полоску шириной  $r_0$ , касающуюся бесконечно тонкого провода с током.

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) \approx \int_S B \cdot dS \approx \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot dS = \\ &= \int_0^{r_0} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l_0 dr = \frac{\mu_0 l_0 I}{2\pi} \cdot \int_0^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 l_0 I}{2\pi} \cdot \ln(r) \Big|_0^{r_0} = \infty \end{aligned}$$

Интеграл расходится на нижнем пределе, так как  $\ln(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\infty$ .

Итак,  $\Phi_B \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $L \rightarrow \infty$  при стремлении диаметра провода к нулю, так как  $\Phi = LI$ .

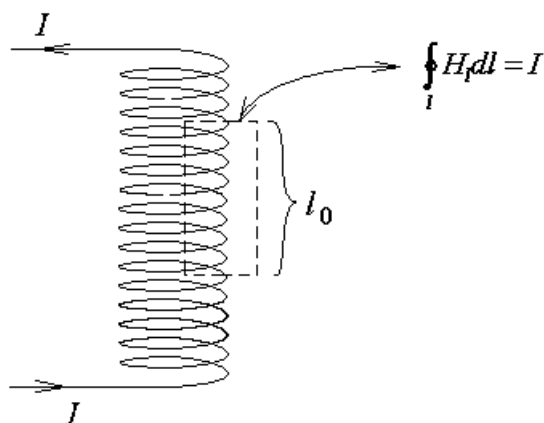
Более строгое определение индуктивности будет позднее дано факультативно через энергию магнитного поля.

### **Индуктивность длинного соленоида с плотной намоткой.**

Хотя данное нами определение индуктивности нестрогое, оно позволяет найти индуктивность в ряде задач.

Алгоритм решения поставленной задачи:  $I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow L$ .

Рассмотрим теорему о циркуляции поля  $\vec{H}$  для прямоугольного пунктирного контура:



Магнитное поле снаружи длинного соленоида мало, следовательно, вклад в циркуляцию поля  $\vec{H}$  дает только вертикальный отрезок длиной  $l_0$  внутри соленоида. Тогда

$Hl_0 = N_0I$ , где  $N_0$  — число витков на отрезке соленоида длиной  $l_0$ ,  $N_0I$  — ток, пронизывающий пунктирный контур интегрирования.

$N_0 = nl_0$ , где  $n$  — число витков на единице длины соленоида, тогда

$$Hl_0 = nl_0I \Rightarrow H = nI \Rightarrow B = \mu_0 H = \mu_0 nI \Rightarrow$$

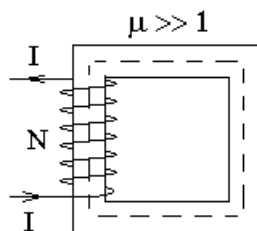
$\Phi = N \cdot BS = N \cdot \mu_0 nI \cdot S = LI$ , где  $N$  — общее число витков в соленоиде,  $n$  — число витков на единице длины соленоида  $S$  — площадь поперечного сечения соленоида,  $BS$  — поток поля  $\vec{B}$  через один виток. Тогда индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 nNS = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}.$$

В системе СГС Гаусса для индуктивности  $\mu_0 \rightarrow 4\pi$  и  $L = 4\pi nNS$ .

### Индуктивность катушки с замкнутым сердечником.

Алгоритм решения задачи:  $I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow L$ .



Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по пунктирному контуру вдоль оси сердечника.

$$\oint_l H_l dl = I$$

Магнитное поле направлено вдоль оси сердечника и одинаковое во всех точках сердечника, если площадь поперечного сечения сердечника везде одинаковая. Тогда

$Hl = NI$ , где  $NI$  — сумма токов проводимости, пронизывающих пунктирный контур интегрирования. Тогда

$$H = \frac{NI}{l} \Rightarrow B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu NI}{l} \Rightarrow$$

$$\Phi = N \cdot BS = N \frac{\mu_0 \mu NI}{l} S = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} I = LI \Rightarrow$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}, \text{ где } l \text{ — длина сердечника, } N \text{ — число витков катушки, } S$$

— площадь поперечного сечения сердечника.

Здесь нельзя заменить  $\frac{N}{l} \rightarrow n$ , так как, если обмотка не по всей длине сердечника, то  $\frac{N}{l} \neq n$ .

В системе СГС Гаусса:  $L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$  или  $\mu_0 \rightarrow 4\pi$ .

### Механическая работа магнитных сил при перемещении витка с током в магнитном поле.

(механическая работа, потому что без учета работы ЭДС индукции)

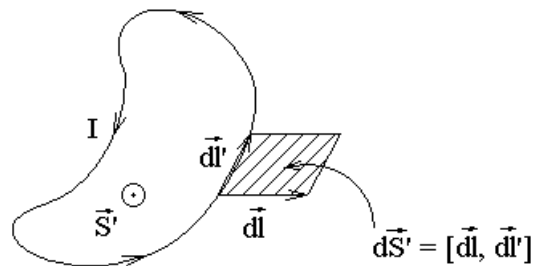
В названии вопроса подчеркивается, что рассматривается механическая работа, так как кроме этой работы работу совершает ЭДС индукции, которая возникает в контуре с током при его перемещении в магнитном поле. Нас интересует только механическая работа, которую совершают силы Ампера.

Пусть  $d\vec{l}$  — перемещение элемента контура  $d\vec{l}'$ . Тогда

$$dA = \oint_{l'} (d\vec{F}', d\vec{l}) = \oint_{l'} (I [\vec{dl}', \vec{B}], d\vec{l}) = I \oint_{l'} ([d\vec{l}, d\vec{l}'], \vec{B}).$$

Здесь  $d\vec{F}'$  — сила Ампера, действующая на элемент контура  $d\vec{l}'$ . В последнем равенстве сделана циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно-векторном произведении векторов, которая не изменяет величины смешанного произведения.

$[d\vec{l}, d\vec{l}'] = d\vec{S}'$  — изменение вектора площадки, ограниченной контуром с током, так как:



Тогда работа магнитных сил (сил Ампера)

$$dA = I \oint_{l'} (\vec{B}, d\vec{S}') = I \oint_{l'} d\Phi_B.$$

Здесь  $\oint_{l'} d\Phi_B$  — сумма изменений потока магнитного поля при

перемещении всех элементов контура. Эта сумма равна изменению потока  $d\Phi_B$  для всего контура. Тогда

$$dA = I d\Phi_B$$

Здесь  $dA$  — работа магнитных сил при перемещении витка с током  $I$ ,  $d\Phi_B$  — изменение потока поля  $\vec{B}$  через поверхность, которая своими краями опирается на контур с током  $I$ .

Поток может изменяться по двум причинам.

1). Перемещение контура в неизменном магнитном поле. При этом совершается работа магнитных сил.

2). Изменение магнитного поля и потока магнитного поля при неподвижном контуре. При этом работа не совершается.

Формула  $dA = I d\Phi_B$  справедлива для изменения потока только в первом случае.

$$\text{В системе СГС Гаусса: } dA = \frac{I}{c} d\Phi_B.$$

Если перемещение контура с током и изменение магнитного поля происходят одновременно, то механическую работу можно найти, представив себе процесс разбитым на малые интервалы времени. На каждом малом интервале можно сначала найти работу при малом перемещении контура с током и неизменном магнитном поле, а затем представить себе малое изменение магнитного поля без перемещения контура и без совершения работы.

Факультативная вставка.

Сила Лоренца не может совершать работу над зарядом, так как она направлена перпендикулярно скорости заряда

$$\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}].$$

Сила Ампера — это та же сила Лоренца, только действующая на элемент тока

$$\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$

Как же получается, что сила Лоренца не может совершать работу, а сила Ампера — может?

Сила Лоренца действует на электроны в электрическом токе проводника. Но эта сила направлена перпендикулярно току, то есть перпендикулярно проводнику. В этом направлении электрону не дает двигаться решетка из положительных ионов проводника. Она удерживает электроны от движения поперек проводника. Электроны давят на решетку из положительных ионов, давят на проводник. Если проводнику позволить перемещаться в направлении этого давления, то проводник совершит положительную работу. Это и есть работа силы Ампера.

Если коротко, то сила Лоренца не может быть направлена в направлении перемещения заряда, поэтому она не может совершать работу, но сила Ампера может быть направлена в направлении перемещения проводника, поэтому она может совершать работу.

Конец факультативной вставки.

### **Механическая работа магнитных сил взаимодействия системы токов без учета взаимодействия каждого контура с самим собой.**

Как и в предыдущем вопросе, работа ЭДС индукции в каждом контуре с током не учитывается.



Пусть  $dA_{ki}$  — работа, совершаемая магнитными силами над  $k$ -ым контуром со стороны магнитного поля тока  $i$ -го контура.

Будем считать, что  $k \neq i$ . Работу  $dA_{ii}$  рассмотрим отдельно в следующем вопросе. Итак  $k \neq i$ . Используя формулу  $dA = I d\Phi_B$ , получим

$$dA_{ki} = I_k d\Phi_{ki} = I_k d(L_{ki} I_i).$$

Формально  $d(L_{ki} I_i) = I_i dL_{ki} + L_{ki} dI_i$ , как дифференциал от произведения. Однако, слагаемое  $L_{ki} dI_i$  означает изменение тока  $I_i$  и вместе с ним магнитного поля без перемещения  $k$ -го контура. Как было замечено в предыдущем вопросе, работа при этом не совершается, поэтому нужно отбросить слагаемое  $L_{ki} dI_i$  и оставить только  $I_i dL_{ki}$ . Следовательно

$$dA_{ki} = I_k I_i dL_{ki}$$

Казалось бы, работа взаимодействия системы токов будет равна  $dA = \sum_{i,k} dA_{ki} = \sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki}$ , однако на самом деле работа вдвое меньше.

Рассмотрим подробнее.

$L_{ki}$  может изменяться и за счет перемещения  $k$ -ого контура (обозначим такое изменение, как  $d_k L_{ki}$ ) и за счет перемещения  $i$ -ого контура (обозначим такое изменение, как  $d_i L_{ki}$ ). Тогда

$dL_{ki} = d_k L_{ki} + d_i L_{ki}$  — изменение коэффициента взаимной индукции при перемещении обоих контуров.

Работа при перемещении  $k$ -го контура в поле  $i$ -го контура  $dA_{ki}$  связана с изменением коэффициента взаимной индукции  $L_{ki}$  только за счет перемещения  $k$ -го контура, тогда

$$dA_{ki} = I_k I_i d_k L_{ki} \text{ вместо прежнего выражения } dA_{ki} = I_k I_i dL_{ki}.$$

Рассмотрим сумму двух слагаемых

$$dA_{ki} + dA_{ik} = I_k I_i d_k L_{ki} + I_i I_k d_i L_{ik}.$$

С учетом  $L_{ik} = L_{ki}$  получим

$$dA_{ki} + dA_{ik} = I_k I_i d_k L_{ki} + I_k I_i d_i L_{ki} = I_k I_i (d_k L_{ki} + d_i L_{ki}) = I_k I_i dL_{ki} \quad \Rightarrow$$

$$dA_{ki} + dA_{ik} = I_k I_i dL_{ki}$$

Просуммируем это равенство по всем значениям индексов  $i$  и  $k$ , таких что  $i \neq k$ , и получим

$$\sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} dA_{ki} + \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} dA_{ik} = \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} I_k I_i dL_{ki}.$$

Здесь в левой части равенства каждая из двух сумм равна  $dA$ . Тогда

$$dA = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} I_k I_i dL_{ki} \text{ — механическая работа взаимодействия системы токов}$$

без учета работы каждого контура над самим собой.

## Механическая работа магнитных сил контура с током над самим собой при деформации контура.

Антипараллельные токи отталкиваются, поэтому контур с током стремится растянуться в окружность. Если ему позволить, то он совершит положительную работу.

Мысленно разобьем контур с током  $I$  на сумму  $N$  токов  $I_i = \frac{I}{N}$ . Пусть эти токи полностью тождественны и каждый из них занимает один и тот же объем — весь объем провода.

Покажем, что  $\sum_{i=1}^N A_{ii} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}] \Rightarrow dF_i \sim B_i I_i$$

Но  $B_i \sim I_i \sim \frac{1}{N}$ , тогда

$$dF_i \sim B_i I_i \sim \frac{1}{N^2} \Rightarrow A_{ii} \sim dF_i \sim \frac{1}{N^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^N A_{ii} = N A_{ii} \sim \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Тогда для системы тождественных токов при  $N \rightarrow \infty$  можно пренебречь работой каждого тока над самим собой и найти работу по формуле из предыдущего вопроса:

$$dA \approx \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} I_k I_i dL_{ki}$$

Здесь все слагаемые одинаковые, так как токи тождественны, тогда

$$dA = \frac{1}{2} N(N-1) I_k I_i dL_{ki} = \frac{1}{2} N(N-1) \frac{I}{N} \cdot \frac{I}{N} dL \approx \frac{1}{2} I^2 dL \Rightarrow$$

$$dA = \frac{1}{2} I^2 dL \text{ — работа контура с током } I \text{ над самим собой, } dL \text{ —}$$

изменение индуктивности контура при его деформации.

## Механическая работа взаимодействия системы токов с учетом работы каждого контура над самим собой.

$$dA = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} I_k I_i dL_{ki} + \frac{1}{2} \sum_i I_i^2 dL_{ii}$$

Здесь первое слагаемое — работа взаимодействия системы токов без учета работы каждого контура над самим собой, второе слагаемое — работа каждого контура над самим собой.

Объединяя оба слагаемых в одну сумму, получим

$$dA = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki} .$$