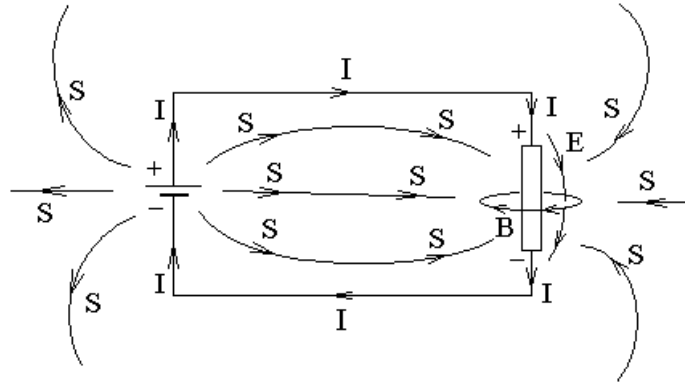


Примеры движения энергии электромагнитного поля.

Свет — это частный случай движения электромагнитной энергии, и направление света совпадает с направлением вектора Пойнтинга. Длина волны света мала по сравнению с размерами оптических устройств. В данном же вопросе мы рассмотрим варианты движения электромагнитной энергии, когда длина волны наоборот гораздо больше размеров рассматриваемых устройств.

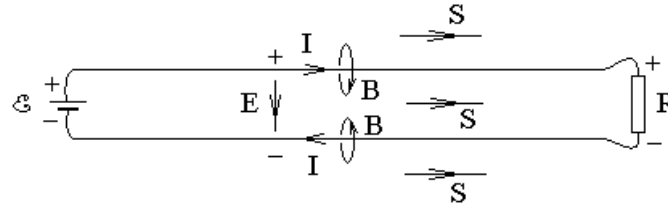
1. Поле вокруг резистора с током.



$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Линии поля \vec{S} втекают в резистор со всех сторон, а из батареи ЭДС — вытекают.

2. Двухпроводная линия.



Энергия распространяется от ЭДС к нагрузке рядом с проводами линии, а не по проводам.

Есть два способа описания одной и той же энергии:

1). Энергия зарядов $W = q\varphi$, которая передается по проводам.

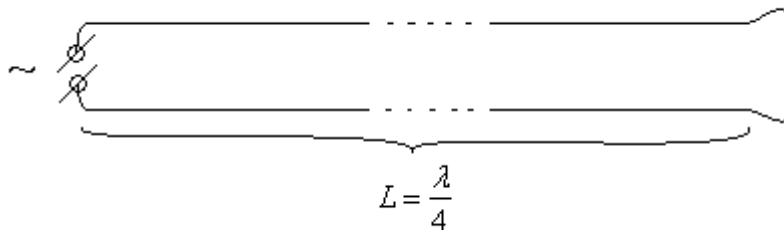
2). Объемная плотность энергии поля $w = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{2} + \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}$, которая проходит рядом с проводами.

Энергия зарядов — это потенциальная энергия. Если рассматривать переменные поля, то поле не потенциально. Поэтому у зарядов нет энергии в обычном смысле. Остается только энергия поля.

Энергию зарядов можно рассматривать до тех пор, пока $r \ll \lambda = \frac{c}{\nu}$, где r — размер электрической схемы λ — длина волны излучения. Так для частоты

$$\nu = 50 \text{ Гц} \text{ получаем } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{300000 \left(\frac{\text{км}}{c} \right)}{50 \left(\frac{1}{c} \right)} = 6000 \text{ км}.$$

Рассмотрим источник переменного напряжения, в котором потенциалы на контактах изменяются синусоидально в противофазе друг другу. Пусть, для определенности, напряжение изменяется с частотой 50 Гц. Источник напряжения присоединен к длинной двухпроводной линии, а на удаленном конце двухпроводная линия короткозамкнута.



Пусть длина двухпроводной линии $L = \frac{\lambda}{4} = 1500$ км. В таком случае оказывается, что короткое замыкание на удаленном конце линии будет восприниматься источником напряжения, как разрыв, а не как короткое замыкание.

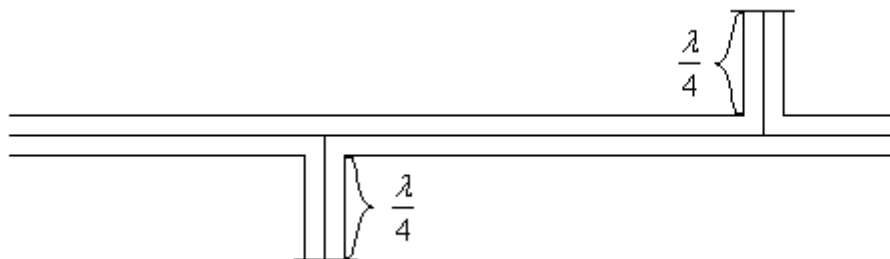
И действительно. Длина $\frac{\lambda}{4}$ эквивалентна сдвигу фаз $\frac{\pi}{2}$. Пусть в какой-то момент времени потенциал верхней клеммы источника максимален. На правом конце линии распространяющийся потенциал отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а доходя до нижней клеммы отстает еще на $\frac{\pi}{2}$. В сумме отставание фазы на π , что означает, что сигнал от верхней клеммы приходит к нижней клемме в противоположной фазе. То есть, когда на верхней клемме максимальный потенциал, к нижней клемме только доходит предыдущее минимальное значение потенциала. В этот же момент времени источник напряжения подает на нижнюю клемму минимальный потенциал, тот же, что и пришедший по двухпроводной линии. Следовательно, ток от источника не течет.

В этом смысле источник напряжения воспринимает короткое замыкание на удаленном конце линии, как разрыв.

В радиолокационных станциях старого типа используется излучение с длиной волны $\lambda = (10 \div 100) \text{ см}$. Сигнал от генератора к антенне передается по жесткому коаксиальному кабелю, который состоит из центрального провода и цилиндрической проводящей оболочки (экрана) вокруг него. Для гибкого

коаксиального кабеля оболочку называют оплеткой. К антенне от генератора подается большая мощность. При этом любой диэлектрик в пространстве между центральной жилой и цилиндрическим экраном не выдерживает разогрева. Если же пространство между центральной жилой и экраном оставить пустым, то непонятно, как удержать центральную жилу по центру экрана.

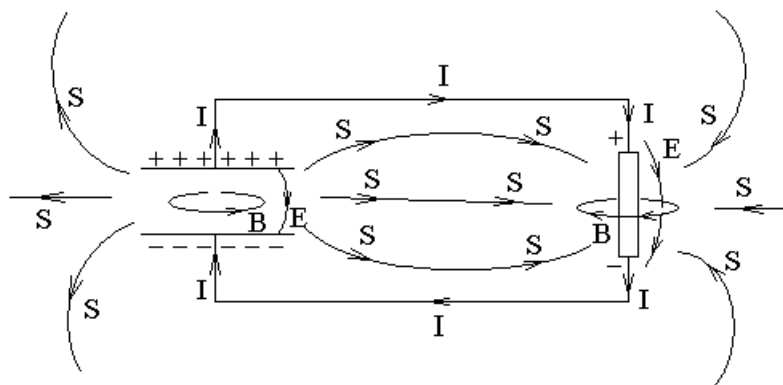
Решение проблемы было найдено в виде четвертьволнового стакана.



Конец четвертьволнового стакана является коротким замыканием, а сам стакан воспринимается сигналом центральной жилы, как разрыв, а не как короткое замыкание. По ходу распространения сигнала таких стаканов может быть несколько. В настоящее время четвертьволновым стаканом называют несколько иную конструкцию, а то, что рассмотрели мы, называют четвертьволновым штырем.

3). Разряд конденсатора через сопротивление.

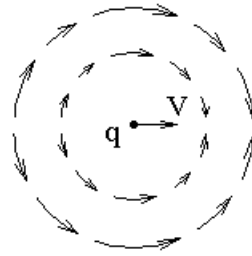
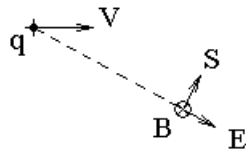
Энергия вытекает из плоского конденсатора через щели между пластинами.



4). Равномерно и прямолинейно движущийся заряд.

В нерелятивистском приближении энергия перетекает по полуокружностям, обегая вокруг заряда в направлении его движения.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{V}, \vec{r}]}{r^3} \quad \vec{S} = [\vec{E}, \vec{B}]$$



Электрические цепи переменного тока.

Связь тока и напряжения для линейных элементов цепи переменного тока.

Для резистора:

$$U = RI$$

Для конденсатора:

$$\begin{cases} C \equiv \frac{q}{U} \\ I \equiv \frac{dq}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(t') \cdot dt'$$

Для катушки индуктивности:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = LI \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_{инд} = -L\dot{I}, \quad \text{где } \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt}.$$

Рассмотрим закон Ома для участка цепи с учетом ЭДС:

$$U + \mathcal{E} = RI.$$

Пусть сопротивление участка цепи стремится к нулю $R \rightarrow 0$, тогда

$$U = -\mathcal{E}.$$

То есть согласно принятым правилам знаков напряжение, падающее на ЭДС, отличается знаком от величины самой ЭДС. Аналогично для катушки индуктивности:

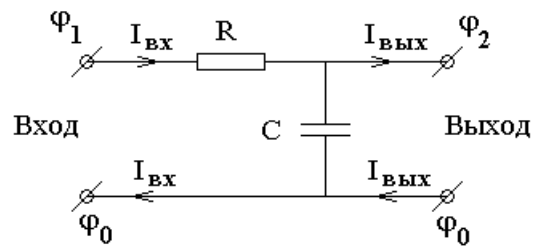
$$U_L = -\mathcal{E}_{инд}.$$

Тогда связь тока и напряжения для линейных элементов цепи имеет вид:

$$\begin{cases} U_R = RI \\ U_C = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' \\ U_L = L\dot{I} \end{cases}$$

Интегрирующая RC-цепочка.

Пусть напряжение $U_{вх}(t)$ подается на последовательно включенные резистор и конденсатор, а снимается с конденсатора напряжение $U_{вых}(t)$.



Факультативная вставка.

Если бы выходной ток различался в верхнем и нижнем проводе, то заряды тока где-то справа от схемы накапливались на проводнике, у которого большая емкость относительно бесконечности. Более того, при этом входные токи на верхнем и нижнем проводе тоже должны были бы различаться, и слева от схемы тоже должен бы быть проводник с большой емкостью относительно бесконечности.

Конец факультативной вставки.

Обычно, если не оговорено обратное, подразумевается, что к выходу схемы ничего не подключено и поэтому выходной ток схемы равен нулю $I_{вых} = 0$.

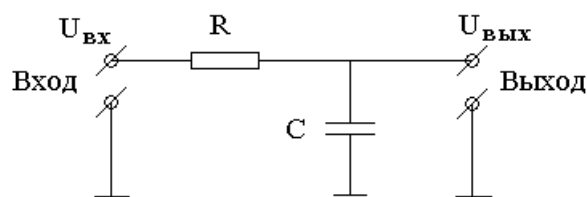
$$U_{вх} = \varphi_1 - \varphi_0$$

$$U_{вых} = \varphi_2 - \varphi_0$$

Нижний провод схемы — общий провод для входа и выхода.

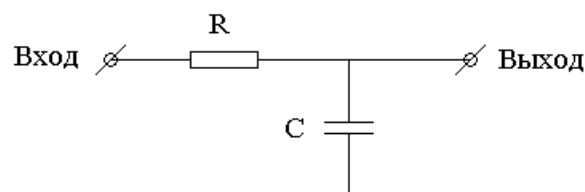
Общий провод схемы, относительно которого отсчитывают потенциалы всех остальных точек схемы, обычно обозначают знаком \perp .

Тогда схему можно перерисовать в виде:

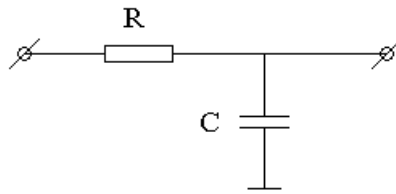


Надписи $U_{вх}$ и $U_{вых}$ можно не делать, так как обычно подразумевается, что напряжение подается на верхнюю клемму пары входных клемм и снимается тоже с верхней клеммы пары выходных клемм.

Общий провод на входе и выходе схемы обычно не рисуют, он подразумевается. Тогда



Обычно подразумевается, что вход схемы находится слева, а выход — справа. Тогда



Пусть напряжение на входе схемы $U_{ex}(t)$ — любая функция времени и пусть в любой момент времени выполняется условие $|U_{вых}(t)| \ll |U_{ex}(t)|$.

Входное напряжение схемы $U_{ex}(t)$ можно рассматривать, как внешнюю ЭДС. Тогда уравнение Кирхгофа для контура примет вид:

$$U_{ex}(t) = RI(t) + \frac{q(t)}{C}.$$

Для краткости не будем писать аргумент в виде времени:

$$U_{ex} = RI + \frac{q}{C}.$$

Слагаемое $\frac{q}{C}$ — это напряжение на выходе схемы, которое по условию мало. Следовательно,

$$U_{ex} \approx RI \quad \Rightarrow \quad I \approx \frac{U_{ex}}{R} \quad \Rightarrow$$

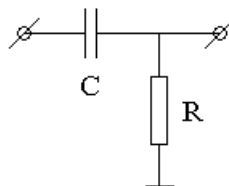
$$q(t) = \int_0^t I(t') dt' \approx \int_0^t \frac{U_{ex}(t')}{R} dt' = \frac{1}{R} \int_0^t U_{ex}(t') dt'.$$

$$U_{вых} = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow$$

$$U_{вых}(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t U_{ex}(t') \cdot dt' \quad \text{при условии} \quad |U_{вых}(t)| \ll |U_{ex}(t)|.$$

Для хорошего интегрирования достаточно чтобы произведение RC было велико по сравнению со временем интегрирования.

Дифференцирующая RC-цепочка.



Пусть напряжение $U_{ex}(t)$ на входе схемы — любая функция времени. Входное напряжение подается на последовательно включенные конденсатор C

и резистор R , а с резистора снимается напряжение $U_{\text{вых}}(t)$. И пусть в любой момент времени выполнено условие $|U_{\text{вых}}(t)| \ll |U_{\text{вх}}(t)|$. Подразумевается, что ток на выходе схемы равен нулю, то есть к выходу ничего не подключено.

Входное напряжение схемы $U_{\text{вх}}(t)$ можно рассматривать, как внешнюю ЭДС. Тогда уравнение Кирхгофа для контура примет вид:

$$U_{\text{вх}} = \frac{q}{C} + RI, \text{ что справедливо в любой момент времени. Второе}$$

слагаемое — это напряжение на выходе схемы, и оно очень мало. Тогда

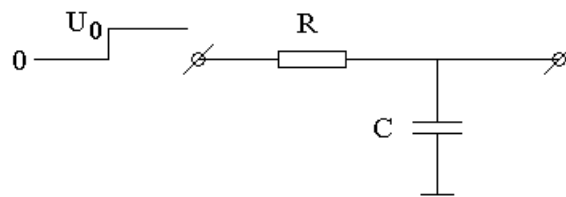
$$U_{\text{вх}} \approx \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad q \approx CU_{\text{вх}} \quad \Rightarrow \quad I = \dot{q} \approx C\dot{U}_{\text{вх}} \quad \Rightarrow$$

$$U_{\text{вых}} = RI \approx RC\dot{U}_{\text{вх}} \quad \Rightarrow$$

$$U_{\text{вых}} \approx RC \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} \text{ при условии } |U_{\text{вых}}(t)| \ll |U_{\text{вх}}(t)|.$$

Для хорошего дифференцирования достаточно, чтобы время RC было мало, так чтобы $U_{\text{вх}}$ не успевало заметно измениться за время RC .

Пример 1. Реакция RC-цепочки на ступеньку напряжения.



Пусть резистор и конденсатор включены последовательно. На эту схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения величиной U_0 . Нужно найти напряжение на конденсаторе, как функцию времени.

Та же самая схема была рассмотрена в вопросе "Интегрирующая RC-цепочка", но в том вопросе было дополнительное условие $|U_{\text{вых}}(t)| \ll |U_{\text{вх}}(t)|$, которое в данном вопросе не выполнено. Зато теперь вместо произвольной функции времени на входе схемы рассматривается только ступенька напряжения.

Напомним уравнения Кирхгофа.

$$1). \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i U_i \text{ — для любого контура.}$$

$$2). \sum_i I_i = 0 \text{ — для любого узла.}$$

Рассмотрим уравнение $\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i U_i$ для единственного контура.

Напряжение на входе можно рассматривать, как внешнюю ЭДС.

После включения ступеньки напряжения выполнено условие:

$U_0 = RI + \frac{q}{C}$, которое можно переписать в виде дифференциального уравнения

относительно заряда q на конденсаторе с учетом того, что $I = \dot{q}$:

$$U_0 = R\dot{q} + \frac{q}{C} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R}$$

Общее решение этого неоднородного уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде константы.

$$q = const \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad q = CU_0 \quad \text{—}$$

частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем теперь общее решение однородного уравнения

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0.$$

Факультативная математическая вставка.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t}$, A_i — произвольные константы интегрирования, λ_i — решения характеристического уравнения, которое получается при подстановке в уравнение решения в виде $y = Ae^{\lambda t}$.

Подставим и после сокращения каждого слагаемого на $Ae^{\lambda t}$ получим:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \text{— характеристическое уравнение.}$$

Конец факультативной вставки.

В нашем случае в уравнение $\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0$ подставим $q = Ae^{\lambda t}$ и получим

$$\frac{d}{dt}(Ae^{\lambda t}) + \frac{1}{RC}(Ae^{\lambda t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \frac{1}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0$ имеет вид

$$q = Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

Общее решение неоднородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R}$ имеет вид суммы частного решения неоднородного уравнения $q = CU_0$ и общего решения

$q = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ однородного уравнения:

$q = CU_0 + Ae^{-\frac{t}{RC}}$, здесь A — произвольная константа интегрирования.

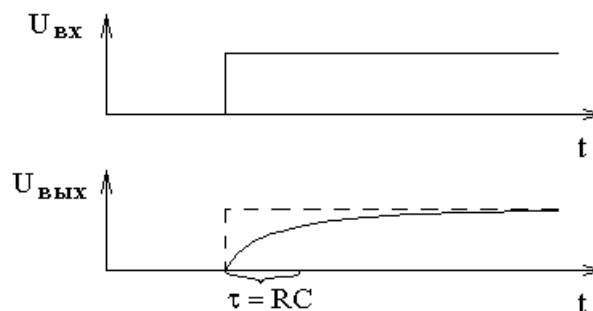
Найдем константу A из условия $U_C(0) = 0 \Rightarrow q(0) = 0 \Rightarrow$

$$0 = CU_0 + Ae^{-\frac{0}{RC}} \Rightarrow A = -CU_0 \Rightarrow$$

$$q = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \Rightarrow$$

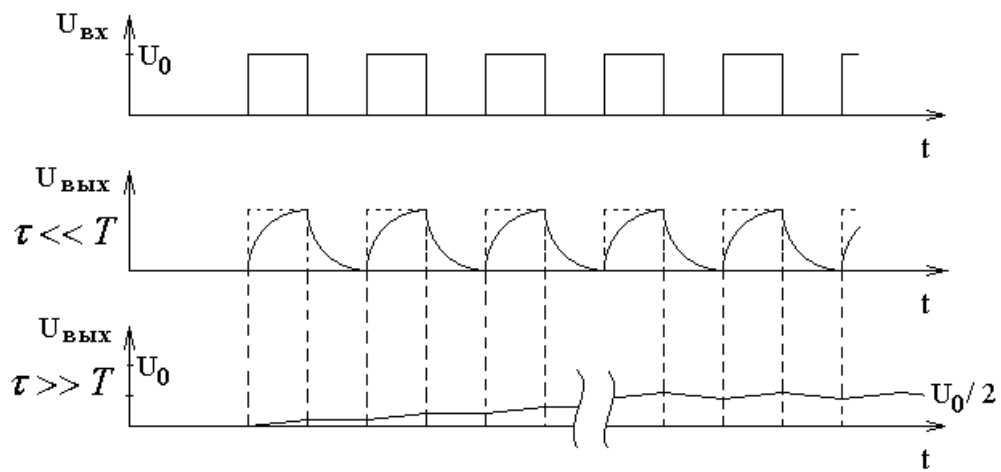
$U_{\text{вых}} = \frac{q}{C} = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$, где произведение $RC = \tau$ называют постоянной

времени RC -цепочки.



Факультативная вставка.

Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов со скважностью 2 (отношение периода к длительности положительного импульса), то



Здесь T — период прямоугольников, $\tau = RC$ — постоянная времени RC -цепочки.

Конец факультативной вставки.