

Парамагнетизм газов в слабых полях (продолжение).

$$\vec{M} = \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT} \vec{B}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \Rightarrow$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{n \cdot |\vec{m}|^2 \vec{B}}{3kT} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT} \right) \vec{B} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} - \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT}} \vec{H}$$

Но $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, тогда $\mu_0 \mu = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} - \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT}}$ и

$$\mu = \frac{1}{1 - \mu_0 \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT}} \approx 1 + \mu_0 \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT} \Rightarrow$$

Для парамагнетиков $\mu > 1$.

В системе СГС Гаусса: $\mu \approx 1 + \frac{4}{3} \pi \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{kT}$.

Факультативная вставка.

Что изменится, если допустить рассмотрение сильных магнитных полей?

Для вероятности нужно оставить выражение в виде

$$d\xi = A \cdot e^{-\frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta.$$

Для сильного поля экспоненту нельзя заменить отрезком ряда Тейлора.

Константу A по-прежнему можно найти из условия нормировки: $\int d\xi = 1$.

Тогда

$$1 = \int_0^\pi A \cdot e^{-\frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = A \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} d(\cos(\theta))$$

Обозначим для краткости $\eta = \frac{|\vec{m}| B}{kT}$ и $\zeta = \cos(\theta)$. Тогда

$$1 = A \int_{-1}^{+1} e^{\eta \zeta} d\zeta = A \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{\eta}$$

Откуда

$$A = \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}}$$

и

$$d\xi = \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}} e^{\eta \cdot \cos(\theta)} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$$

По-прежнему

$$\begin{aligned} M &= n \cdot \langle |\vec{m}| \rangle = n \cdot \langle (\vec{m})_B \rangle = n \cdot \int (\vec{m})_B \cdot d\xi = n \cdot \int |\vec{m}| \cdot \cos(\theta) \cdot d\xi = \\ &= n \cdot |\vec{m}| \cdot \int_0^\pi \cos(\theta) \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}} e^{\eta \cdot \cos(\theta)} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \end{aligned}$$

Опять $\zeta = \cos(\theta)$ и

$$M = n \cdot |\vec{m}| \cdot \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}} \int_{-1}^1 \zeta e^{\eta \zeta} d\zeta = n \cdot |\vec{m}| \cdot \frac{1}{\eta(e^\eta - e^{-\eta})} \int_{-\eta}^{\eta} \mu e^\mu d\mu,$$

где сделана замена переменной интегрирования $\mu = \eta \zeta$. И окончательно

$$M = n \cdot |\vec{m}| \cdot \left(\frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} - \frac{1}{\eta} \right), \text{ где } \eta = \frac{|\vec{m}| B}{kT}.$$

В очень сильном магнитном поле \vec{B} , когда $\eta \rightarrow \infty$, все магнитные диполи повернутся вдоль поля \vec{B} , и намагниченность $M \approx n \cdot |\vec{m}|$ перестает расти с увеличением поля — это насыщение намагниченности.

Конец факультативной вставки.

Свойства ферромагнетиков.

1). $\mu \gg 1$

$$\begin{cases} B = \mu_0 \mu H \gg \mu_0 H \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{cases} \Rightarrow B \approx \mu_0 M \Rightarrow$$

Для ферромагнетиков магнитная индукция и намагниченность — почти одно и то же с точностью до коэффициента μ_0 .

В системе СГС Гаусса: $\vec{B} \approx 4\pi \vec{M}$.

2). Теория Вейсса.

Теория Вейсса — это теория ферромагнетизма, которую мы рассматривать не будем.

В этой устаревшей некантовой теории в качестве исходного пункта взято необычное выражение для энергии атомарного магнитного диполя. Вместо $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ постулируется, что $W = -(\vec{m}, \vec{B} + b\vec{M})$, где $b\vec{M}$ — так называемое молекулярное поле, $b > 0$ — константа своя для каждого ферромагнетика.

Придуманное Вейссом молекулярное поле $b\vec{M}$ стремится удержать диполи в направлении намагниченности \vec{M} аналогично тому, как поле \vec{B} стремится удержать диполи в направлении поля \vec{B} в случае $W = -(\vec{m}, \vec{B})$.

Молекулярное поле введено, чтобы объяснить, почему при устранении внешнего поля \vec{B} диполи остаются направленными в одну сторону, и получается постоянный магнит.

Дальнейшее построение теории Вейсса аналогично теории парамагнетизма только вместо $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ нужно использовать $W = -(\vec{m}, \vec{B} + b\vec{M})$.

3). Доменная структура ферромагнетиков.

Ферромагнетизм наблюдается только в твердом теле. Ферромагнетик состоит из доменов. Характерный размер доменов (10—100) мкм. Внутри одного домена магнитные диполи атомов направлены в одну сторону. Магнитные моменты разных доменов направлены хаотически.

Согласно квантовой теории, когда электронные оболочки двух атомов соприкасаются, между атомами возникает обменное взаимодействие.

В результате обменного взаимодействия магнитные моменты соседних атомов стремятся повернуться в одну сторону. Причина этого стремления лежит в тождественной неразличимости электронов.

Факультативная вставка.

В твердом теле намагниченность создается только за счет спинов электронов, орбитальная намагниченность отсутствует.

В квантовой механике есть соотношение неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Здесь Δx — среднеквадратичное отклонение от среднего значения x -координаты при многократных попытках измерить x -координату электрона в одних и тех же условиях, Δp_x — среднеквадратичное отклонение x -проекции импульса электрона от среднего значения.

При приближении двух атомов друг к другу, когда их электронные оболочки начинают соприкасаться, электроны из разных атомов могут меняться местами. При этом неопределенность Δx в положении каждого электрона возрастает

$$\Delta x \nearrow \Rightarrow \Delta p_x \searrow \Rightarrow \langle p_x^2 \rangle \searrow \Rightarrow \langle p^2 \rangle \searrow \Rightarrow E_{кин} \searrow \Rightarrow E_{полная} \searrow.$$

Любая система стремится к минимуму энергии. Если соседним атомам легче обмениваться электронами, когда спины и магнитные диполи электронов направлены в одну сторону, то магнитные моменты электронов будут направлены в одну сторону за счет энергии обменного взаимодействия.

Если внутренняя оболочка атома не полностью заполнена электронами, как например, для атомов железа, то энергия обменного взаимодействия отрицательна для электронов с одинаково направленными спинами. В таком случае вещество — ферромагнетик.

Если же атомы имеют незаполненную только внешнюю электронную оболочку, то обменная энергия отрицательна для электронов пары атомов с противоположно направленными спинами электронов. В случае сильного

обменного взаимодействия соседние атомы имеют противоположно направленные магнитные моменты. Суммарный магнитный диполь каждой пары атомов равен нулю. Это так называемые антиферромагнетики.

Конец факультативной вставки.

Любая система стремится к минимуму энергии. Энергия обменного взаимодействия ферромагнетиков минимальна (отрицательна) при одинаковом направлении магнитных диполей соседних атомов.

С другой стороны, если все магнитные диполи направлены в одну сторону, то образец намагничен и создает вокруг себя магнитное поле. Это магнитное поле имеет положительную энергию, объемная плотность которой

$$w = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}.$$

Чтобы минимизировать сумму энергии обменного взаимодействия и энергии магнитного поля, образец самопроизвольно распадается на так называемые домены разных размеров (10—100) мкм для разных ферромагнетиков.

В каждом домене магнитные диполи направлены в одну сторону, а магнитные диполи разных доменов направлены хаотически. Если домены малы, то магнитное поле всего образца мало, и мала энергия магнитного поля. Если домены не слишком малы, то большинство атомов находится внутри домена, а не на его поверхности. Для атомов внутри домена энергия обменного взаимодействия минимальна. Так минимизируется сумма энергии магнитного поля и энергии обменного взаимодействия.

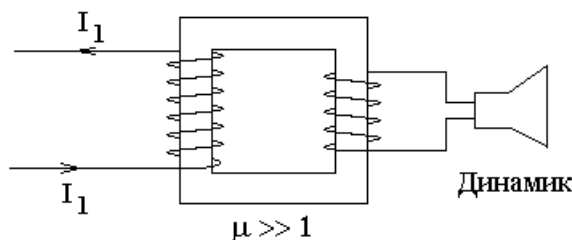
4). Точка Кюри.

При нагревании ферромагнитного материала есть критическая температура, при которой происходит фазовый переход из ферромагнитного состояния в парамагнитное состояние. Энергия тепловых столкновений оказывается достаточной для разбрасывания магнитных диполей по направлениям, несмотря на обменное взаимодействие диполей.

Эта критическая температура и называется температурой Кюри или точкой Кюри.

5). Эффект Баркгаузена.

Эффект Баркгаузена состоит в том, что в следующей схеме



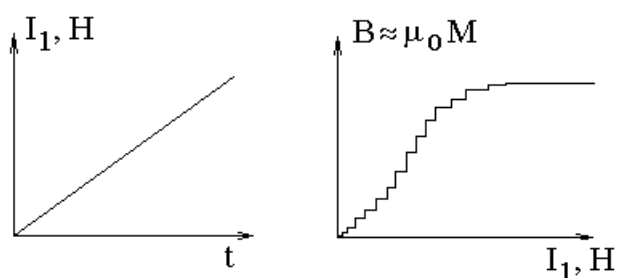
слышны щелчки из динамика, включенного во вторичную обмотку трансформатора, когда в первичной обмотке изменяется сила тока.

Во внешнем магнитном поле домены, направленные по полю, растут, а направленные против поля — тают. Это можно увидеть в микроскоп. Переход

атома из одного домена в другой происходит без пространственного перемещения атома, происходит только за счет поворота магнитного диполя электронной оболочки пограничного атома из направления, соответствующего одному домену, в направление, соответствующее соседнему домену.

Изменение границ доменов происходит скачками от одного дефекта структуры, вызванного атомом примеси, до другого дефекта. Эти скачки и вызывают эффект Баркгаузена — щелчки или шуршание из динамика, включенного во вторичную обмотку трансформатора, когда в первичной обмотке изменяется сила тока.

Пусть, например, сила тока линейно нарастает со временем. Тогда напряженность магнитного поля $H \sim I_1$ пропорциональна току I_1 в первичной обмотке и скачков не испытывает, так как согласно теореме о циркуляции: $Hl = NI_1$.

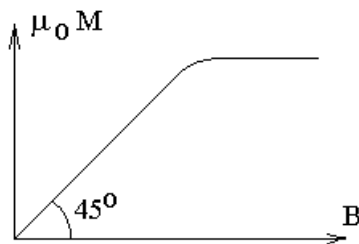


При изменении напряженности поля H скачками меняется намагниченность M вместе с магнитной индукцией $B \approx \mu_0 M$. Скачок магнитной индукции сопровождается скачком потока магнитной индукции $\Phi_B = NBS$, что означает бесконечную производную от потока по времени и бесконечную ЭДС индукции: $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. Эти короткие импульсы напряжения во вторичной обмотке и проявляются в виде щелчков или шуршания в динамике.

На самом деле скачок намагниченности происходит за конечное, хотя и малое время. По этой причине на частотах в сотни мегагерц и выше ферромагнетизма нет.

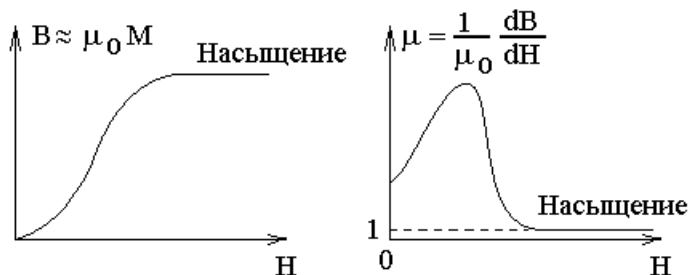
б). Насыщение намагниченности.

Намагниченность среды M зависит от магнитного поля B , но эта зависимость мало информативна, так как для любого ферромагнетика $B \approx \mu_0 M$, и зависимость $\mu_0 M$ от B — это прямая линия под углом 45° :



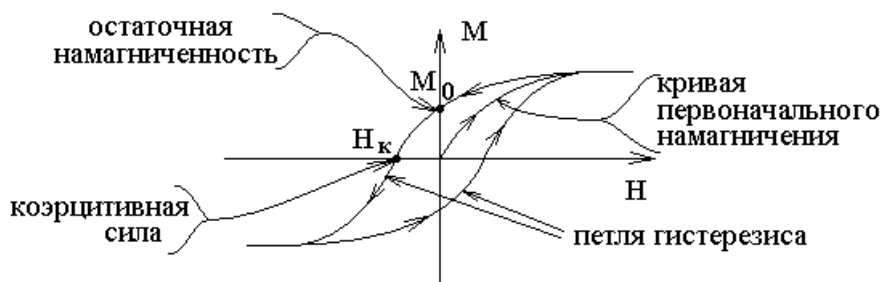
Поэтому рассматривают более информативную зависимость намагниченности M или магнитной индукции $B \approx \mu_0 M$ от напряженности магнитного поля H . При малых напряженностях намагниченность быстро возрастает с ростом напряженности, а при больших — перестает расти. Это происходит, когда все магнитные диполи оказываются направлены вдоль магнитного поля.

Прекращение роста намагниченности — это и есть насыщение намагниченности.



7). Гистерезис (отставание).

При изменении напряженности в одну, другую сторону, и обратно, зависимость намагниченности от напряженности образует петлю — так называемую петлю гистерезиса. При этом изменение намагниченности M отстает от изменения напряженности магнитного поля H .



Если в начальный момент времени напряженность поля и намагниченность среды были равны нулю, то зависимость $M(H)$ описывает кривую первоначального намагничения или первоначальной намагниченности.

Если после насыщения намагниченности убрать напряженность магнитного поля, то оставшееся значение намагниченности M_0 называется остаточной намагниченностью (постоянного магнита).

Напряженность магнитного поля H_k , необходимая для устранения остаточной намагниченности M_0 называется коэрцитивной силой.

Если остаточная намагниченность железа мала, то железо называют мягким. Его используют в трансформаторах. Жесткое железо используют для изготовления постоянных магнитов.

Факультативная вставка.

В системе СГС Гаусса магнитная индукция измеряется в Гауссах, а в системе СИ — в Теслах: $1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$. Напряженность магнитного поля соответственно в Эрстедах и Ампер/метр, соотношение единиц примерно: $1 \text{ Э} = 80 \text{ А/м}$.

Сильные постоянные магниты получаются на основе сплавов NdFeB — неодим-железо-бор — это так называемые неодимовые магниты. Например, магнит N 45 имеет объемную плотность энергии магнитного поля в системе СГС Гаусса $\frac{(\vec{B}, \vec{H})}{8\pi} = 45 \cdot 10^6$ (Гаусс*Эрстед). В вакууме в системе СГС Гаусса индукции 1 Гс соответствует напряженность 1 Э. Для сравнения: магнитное поле Земли на экваторе $B = 0.3$ Гс, на широте 50° $B = 0.5$ Гс. Казалось бы, остаточная магнитная индукция $B = \sqrt{45 \cdot 8\pi} \cdot 10^3$ Гс, однако согласно справочным таблицам она в 2.5 раза меньше этой величины ($B = 13500$ Гс). Вероятно, под объемной плотностью энергии в этом случае подразумевается энергия всего магнитного поля (внутри и вне магнита) отнесенная ко всему объему магнита.

Конец факультативной вставки.

8). Нагревание сердечника при перемагничивании.

$dw = (\vec{H}, d\vec{B})$ — изменение объемной плотности энергии магнитного поля. С учетом $B \approx \mu_0 M$ получаем $dw \approx \mu_0 (\vec{H}, d\vec{M})$.

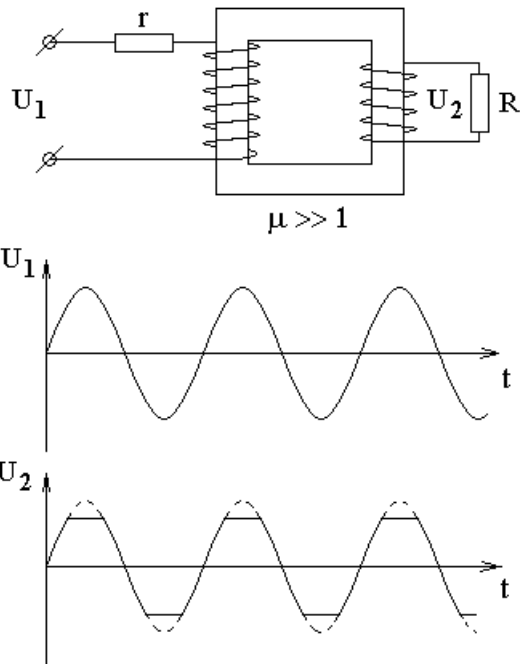
Изменение энергии в замкнутом цикле перемагничивания $\nu = \oint H dB \approx \mu_0 \oint H dM$ переходит в теплоту сердечника сделанного из ферромагнетика. Теплота, выделяющаяся в единице объема ферромагнетика, равна площади петли гистерезиса $\nu \approx \oint H dB$.

В системе СГС Гаусса: $\nu \approx \frac{1}{4\pi} \oint H dB \approx \oint H dM$.

9). При нормальной работе трансформатора сердечник нельзя вводить в насыщение.

Без насыщения сердечника $\mu \gg 1$. При насыщении $\mu \equiv \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \approx 1$.

Индуктивность первичной обмотки трансформатора $L_{11} \sim \mu$. Следовательно, при насыщении сердечника трансформатора индуктивность первичной обмотки резко уменьшается. При этом возрастает ток холостого хода. При большом токе в первичной обмотке входное напряжение падает на активном сопротивлении первичной обмотки и не трансформируется во вторичную обмотку.



Напряжение во вторичной обмотке насыщается, как это изображено на рисунке. На этом принципе работает феррорезонансный стабилизатор напряжения, а обычный трансформатор в таком режиме сильно греется и гудит.

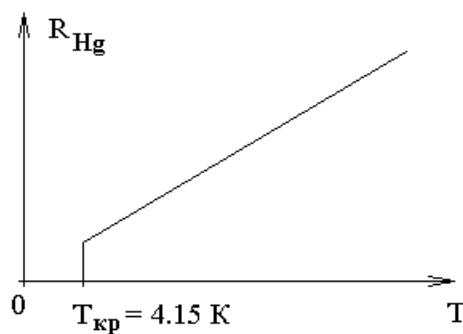
10). Размагничивание.

Многokратное перемагничивание с убывающей амплитудой магнитного поля размагничивает образец.

Свойства сверхпроводников.

1). Фазовый переход.

В 1911 году изучение зависимости сопротивления ртути от температуры привело к открытию сверхпроводимости.



Явление сверхпроводимости состоит в том, что при понижении температуры сопротивление скачком падает до нуля. Эта температура $T_{кр}$ называется критической.

Сверхпроводимость обнаружена не у всех металлов.

Для всех чистых элементов таблицы Менделеева $T_{кр} < 10K$.

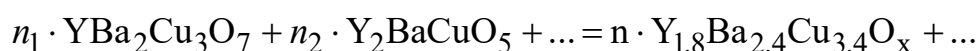
2). Высокотемпературная сверхпроводимость.

$77 K = -196^{\circ}C$ — температура кипения жидкого азота.

Если критическая температура $T_{кр} > 77K$, то сверхпроводимость называют высокотемпературной.

Охлаждение до температуры кипения жидкого азота относительно недорого. Так 1 литр жидкого азота стоит примерно столько же, сколько стоит разовый проезд в метро.

Высокотемпературная сверхпроводимость получена в материалах, которые представляют собой металлокерамику на основе соединений меди. Обычно под керамикой понимают обожженную глину. Как правило, под глиной понимают минерал, основой которого является каолинит $Al_4[Si_4O_{10}](OH)_8$. На AliExpress можно купить высокотемпературный сверхпроводник на основе металлокерамики с критической температурой $T_{кр} \approx 90K$:



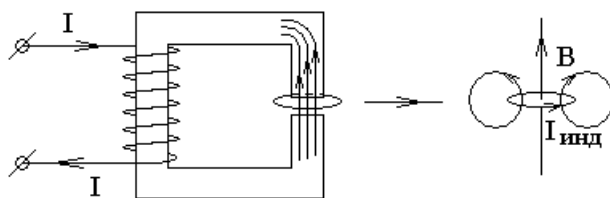
Сверхпроводимость при атмосферном давлении при максимально высокой температуре $T_{кр} = 153K = -120^{\circ}C$ получена для $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$.

В 2018 году опубликованы результаты наблюдения сверхпроводимости для супергидрида лантана LaH_{10} при $-13^{\circ}C$ при давлении $2 \cdot 10^6$ атмосфер.

Есть и сомнительные, неподтвержденные результаты высокотемпературной сверхпроводимости. В 2020 году сообщалось о получении сверхпроводимости в системе на основе сероводорода H_2S и метана CH_4 при давлении $2.7 \cdot 10^6$ атмосфер и температуре $+15^{\circ}C$. При высоком давлении сероводород H_2S становится нестабильным и распадается на H_2 и серу S . В июле 2023 года сообщалось о более чем сомнительном результате корейских ученых, о сверхпроводимости при температуре $+127^{\circ}C$ ($400^{\circ}K$) и нормальном давлении в материале под названием LK-99 с приблизительной формулой $Pb_9Cu_1(PO_4)_6O$.

3). Сверхпроводящее кольцо с индуцированным током.

Пусть есть кольцо из материала, который при охлаждении становится сверхпроводящим.



Сначала включают ток I в катушке с сердечником. В результате появляется магнитное поле, и его линии притягивают кольцо из материала, который при охлаждении становится сверхпроводящим. Затем охлаждают кольцо и переводят его в сверхпроводящее состояние. После этого кольцо вынимают из зазора сердечника с магнитным полем. В сверхпроводящем кольце при этом возникает ток индукции.

По правилу Ленца ток индукции имеет такое направление, что стремится устранить причину появления тока индукции. Причина появления тока индукции в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ и изменении потока магнитной индукции Φ_B через кольцо. Направление тока индукции такое, что он стремится сохранить величину потока магнитного поля Φ_B через кольцо.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = RI_{инд} \\ R = 0 \end{cases}$$

Ток индукции не может быть бесконечно большим, так как он создавал бы бесконечный поток магнитного поля вместо того, чтобы сохранять его величину, как требует правило Ленца.

$$\begin{cases} I_{инд} \neq \infty \\ R = 0 \\ \mathcal{E}_{инд} = RI_{инд} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = 0 \\ \mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \Rightarrow \Phi_B = const$$

Когда сверхпроводящее кольцо вынимают из магнитного поля, в нем возникает ток индукции, который поддерживает неизменной величину потока магнитного поля через кольцо.

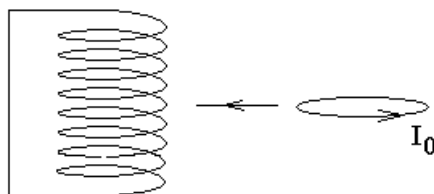
Ток индукции не затухает годами в таком сверхпроводящем кольце. Обнаружить ток индукции можно по наличию магнитного поля рядом со сверхпроводящим кольцом.

4). Задачи со сверхпроводниками.

В любом сверхпроводящем контуре поток магнитного поля сохраняется при любых действиях с контуром. Контур можно деформировать, вставлять его в магнитное поле, вводить в него сердечник. Поток магнитного поля сохраняется.

В качестве примера рассмотрим задачу 3.161 из задачника С. М. Козел, Э. М. Рашба, С. А. Славатинский.

Короткозамкнутая сверхпроводящая катушка с индуктивностью L_c и числом витков N . Сверхпроводящее кольцо того же диаметра с током I_0 и индуктивностью L . Во сколько раз изменится ток в кольце $\frac{I}{I_0} = ?$, если кольцо вдвинуть между витками соленоида.



$$\begin{cases} LI_0 = LI + L_c I_c \frac{1}{N} \\ 0 = L_c I_c + \frac{L_c}{N} I \end{cases} \quad \text{— это два уравнения с двумя неизвестными: } I \text{ —}$$

новый ток в кольце и I_c — ток в соленоиде после внесения кольца в соленоид.

Поясним уравнения системы. Первое уравнение — это сохранение потока в кольце. В последнем слагаемом первого уравнения $L_c I_c$ — поток через катушку за счет тока в катушке, тогда $L_c I_c \frac{1}{N}$ — поток через один виток катушки или через кольцо за счет тока в катушке. Из этого же слагаемого следует, что коэффициент взаимной индукции $L_{12} = \frac{L_c}{N}$. С учетом этого факта получается последнее слагаемое во втором уравнении.

Решаем два уравнения с двумя неизвестными токами I , I_c и находим токи.