

### Электрический разряд в газе (продолжение).

Часть образующихся под действием внешних причин зарядов не достигает электродов, а попадают на стенки разрядной трубки и прилипает к ним. По мере увеличения приложенного к электродам напряжения всё большая часть формирующихся зарядов несамостоятельного разряда достигает электродов, и ток возрастает за счет сбора этой большей части заряженных частиц. Это отображено на левом начальном участке, отмеченном на левом рисунке ниже цифрой 1. Будем обсуждать только левый рисунок. На правой части участка 1 ток не возрастает с ростом напряжения, так как уже все формирующиеся заряды достигают электродов.

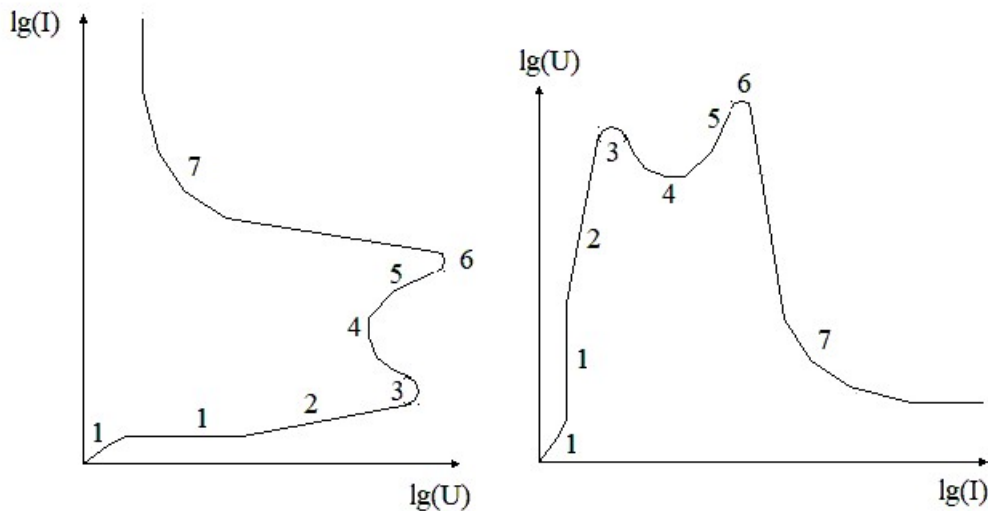


Рис.1. Вольт-амперная характеристика разряда в газе.

1 — несамостоятельный разряд, плотность тока  $j < 10^{-12}$  А/см<sup>2</sup>;

2 — темновой несамостоятельный разряд;

3-4-5 — тлеющий разряд,  $j = (10^{-4} — 10^{-2})$  А/см<sup>2</sup>;

4-5 — аномальный тлеющий разряд;

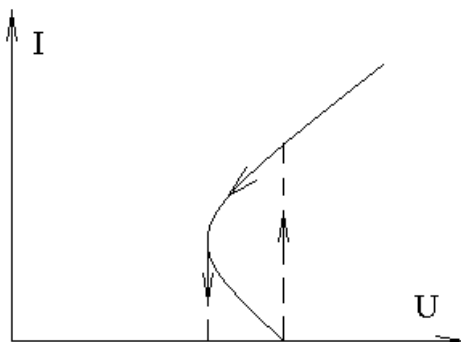
6-7 — дуговой разряд,  $j > 0.1$  А/см<sup>2</sup>.

На участке 2 формируются лавины электронов, но положительные ионы не выбивают электроны из катода. Это так называемый темновой несамостоятельный разряд. Приложенное между проводящими электродами напряжение ускоряет заряженные частицы в газе. Если напряженность электрического поля достаточно велика, то между столкновениями с нейтральными атомами газа электроны успевают набрать энергию достаточную для ионизации нейтральных атомов, по пути к аноду такие электроны будут создавать новые пары электронов и положительных ионов. Электрическое поле ускоряет новые электроны. При ударе снова образуются заряженные частицы и так далее. Образуется лавина электронов, но ионизация атомов происходит только в направлении анода от начального положения появившегося электрона. Каждая такая лавина электронов доходит до анода и прекращается. Положительные ионы, сформированные лавиной электронов, медленно дрейфуют к катоду, достигают катода и уходят от катода в виде нейтральных атомов. По мере возрастания приложенного к электродам напряжения каждый

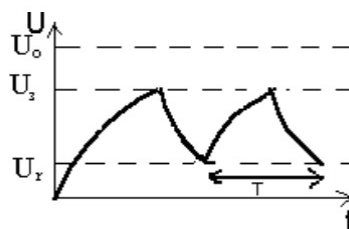
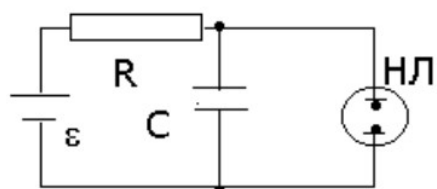
электрон достигает достаточной для ионизации атомов энергии на всё более коротком расстоянии. При этом каждая лавина несет в себе всё больший заряд.

Если приложенное напряжение достигает точки 3 на рисунке, то загорается самостоятельный разряд в газе. В этом случае при ударе положительного иона о катод из катода выбиваются новые электроны. Источником электронов становится сам разряд, а не внешние причины вроде космических лучей, поэтому разряд называют самостоятельным. Момент, когда загорается самостоятельный разряд, называют электрическим пробоем газа.

В линейном масштабе вольт-амперная характеристика тлеющего разряда приведена на рисунке ниже.



Правая вертикальная пунктирная линия — пробой газа. Сила тока при этом изменяется скачком. Если теперь понижать напряжение на разряде, то разряд не погаснет до тех пор, пока напряжение не достигнет левой вертикальной пунктирной линии.



Часто оказывается, что между электродами есть заметная паразитная емкость. После пробоя газа эта емкость быстро разряжается, и часть напряжения падает на внутреннем сопротивлении источника. Если напряжения между электродами недостаточно для поддержания самостоятельного разряда, то разряд гаснет. Получается так называемый искровой разряд — искра. Если искра очень мощная, то это — молния.

Участок между точками 3 и 4 вольт-амперной характеристики разряда на первом рисунке — это тлеющий разряд с отрицательным дифференциальным сопротивлением

$R_{дифф} \equiv \frac{dU}{dI}$ . Чтобы заставить разряд гореть в точке на участке

3-4, необходимо последовательно с разрядом включить резистор с сопротивлением большим, чем модуль отрицательного дифференциального сопротивления в соответствующей точке. В самостоятельном разряде положительные ионы, ударяясь о катод, выбивают из него электроны, а сами возвращаются в разряд в виде возбужденных нейтральных атомов. Эти

возбужденные атомы излучают свет прямо около катода, газ светится у катода. На участке 3-4 первого рисунка с ростом тока разряда возрастает площадь катодного свечения газа. Чем больше площадь, тем больше электронов выбивается из катода. Чем больше электронов, тем меньше напряжения падает на разряде. В результате тлеющий разряд имеет отрицательное дифференциальное сопротивление.

Участок 4-5 вольт-амперной характеристики на первом рисунке — это аномальный тлеющий разряд. На этом участке катодное свечение покрывает весь катод, и рост приложенного напряжения не приводит к увеличению электронов в разряде. На этом участке положительное дифференциальное сопротивление.

Участок 6-7 вольт-амперной характеристики на первом рисунке — дуговой разряд. В дуговом разряде положительные ионы, ударяющиеся в катод, сильно его разогревают. Из горячего катода вылетает большое количество электронов в результате термоэлектронной эмиссии. При этом резко падает напряжение на разряде. Этот участок вольт-амперной характеристики снова имеет отрицательное дифференциальное сопротивление.

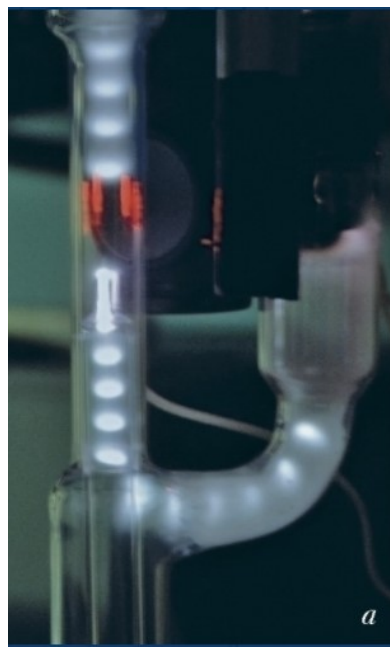
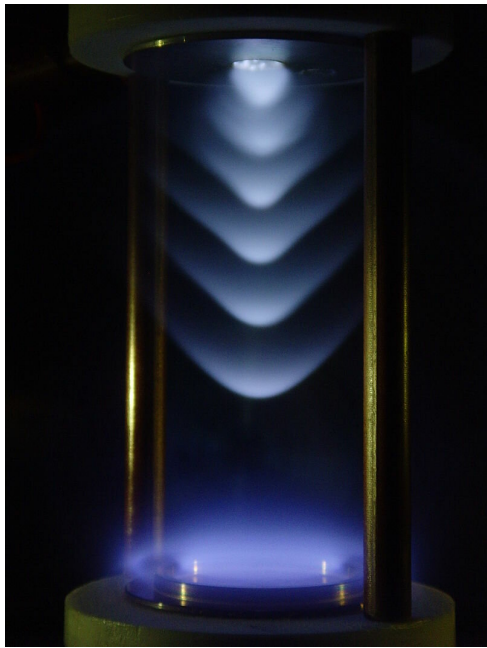
ВЧ разряд. Емкостной и индуктивный высокочастотный разряд.

Страты газового разряда.

Электроны и ионы, разогнанные электрическим полем, не обязательно ионизируют нейтральные атомы при столкновении с ними. Вместо этого возможно возбуждение нейтральных атомов, то есть переход атомов в энергетическое состояние с большей энергией электронной оболочки. При возвращении в состояние с наименьшей энергией атом излучает избыток энергии в виде светового фотона. По этой причине разряд в газе светится.

Электроны, выбитые из катода разрядной трубки, по мере ускорения электрическим полем не сразу достигают скорости достаточной для ионизации нейтральных атомов, и даже скорости достаточной для возбуждения атомов. В результате около катода образуется темное катодное пространство, в котором нет свечения газа. За темным катодным пространством следует светящаяся область газа, в которой ускоренные полем электроны отдают энергию атомам газа. Потеряв энергию, электроны снова какое-то время ускоряются без возбуждения атомов газа. В этой области возникает второе темное пространство. За ним идет снова светлое пространство, затем снова темное и так далее. Это так называемые страты газового разряда. Положение страт часто бывает неустойчивым, так как страты изменяют концентрацию поверхностного заряда на стенке трубки, а заряд на стенке изменяет положение страт. При этом часто возникают автоколебания положения страт. Эти колебания могут быть и непериодическими.

Теория хаоса. Колебания страт часто оказываются непериодическими или хаотическими. Хаос — это состояние системы, при котором очень малые (бесконечно малые) изменения начальных условий радикально изменяют движение системы.



### Амбиполярная диффузия.

Тлеющий разряд иногда называют плазмой положительного столба. Дело в том, что в разрядной трубке концентрация положительных ионов чуть-чуть превышает концентрацию электронов.

При одинаковой энергии электронов и ионов масса электрона в тысячи раз меньше массы иона, поэтому скорость электрона в десятки, а то и сотни, раз больше скорости ионов. Электроны летят хаотически, а не только к аноду. Часть электронов быстро достигает стенки разрядной трубки. При столкновении со стенкой часть электронов прилипает к стенке.

В результате на стенке образуется отрицательный заряд, а в объеме газового разряда — недостаток электронов, положительный объемный заряд. В цилиндрической разрядной трубке возникает радиальное электрическое поле, которое задерживает (не пускает к стенке) электроны и ускоряет положительные ионы. Это радиальное напряжение возрастает до тех пор, пока поток на стенку более быстрых, но замедленных радиальным полем, электронов ни окажется уравновешенным потоком ускоренных положительных ионов.

В постоянном газовом разряде к стенке движутся и отрицательные электроны, и положительные ионы. Это явление называется амбиполярной диффузией. В обратном направлении от стенки разрядной трубки к ее оси движутся нейтральные атомы.

### Пылевая плазма.

Если в тлеющий газовый разряд добавить твердую пыль, то пылинки заряжаются отрицательно аналогично тому, как отрицательно заряжаются стенки разрядной трубки. Пусть катод разрядной трубки расположен внизу, а анод — наверху. Тогда электрическое поле, действуя на отрицательно заряженные пылинки, может уравновесить силу тяжести. Заряженные пылинки будут отталкиваться друг от друга своими отрицательными зарядами, но будут притягиваться к оси плазмы положительного столба разряда, образуя

правильную структуру похожую на кристалл. Это так называемый пылевой кристалл.

### Электробезопасность.

Смертельный ток: 0.1 А.

Порог чувствительности: 3 мА.

Типовое сопротивление кожи: 10 кОм.

Электрический стул.

В воде 12 Вольт — смертельно опасное напряжение. Фен в ванной.  
Человек за бортом.

Птичка на проводе.

Высоковольтная линия электропередачи. Выше напряжение — меньше ток, меньше квадратичные по току потери в проводах. Напряжение пробоя:  $E = 30 \text{ кВ/см}$ . Шипение высоковольтных проводов — коронный разряд. Обрыв высоковольтного провода, шаговое напряжение.

Искровой разряд. Молния. Гроза.

В грозу опасно стоять на открытом месте; опасно купаться в озере, тем более — в море; опасно стоять под деревом.



Шаровая молния — плазмойд.





### Электрические наводки.

Емкостная и индуктивная наводка.

### Что можно было бы рассказать еще, и что я рассказать не успел.

#### Движение заряженной частицы в магнитном поле.

В соответствии с силой Лоренца  $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}]$  в магнитном поле заряд движется с постоянной скоростью вдоль магнитного поля и движется с постоянным модулем скорости по окружности в плоскости перпендикулярной магнитному полю. В результате заряд движется по спирали.

$$m \frac{V^2}{R} = eVB \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{V}{R} = \frac{eB}{m} \quad \text{— так называемая циклотронная}$$

частота.

$$\text{В системе СГС Гаусса:} \quad \Omega = \frac{eB}{cm}.$$

Магнитные ловушки для заряженных частиц. Заряженные частицы отражаются от области сильного магнитного поля. Рассмотрим частицу, которая движется по спирали вокруг и вдоль линии магнитного поля. Пусть в направлении движения частицы линии магнитного поля сгущаются. Рассмотрим окружность движения частицы, окружность перпендикулярную линии магнитного поля. Если центр окружности линия магнитного поля пересекает перпендикулярно плоскости окружности, то в результате сгущения линий по краям окружности линии магнитного поля пересекают плоскость окружности не под прямым углом. В результате сила Лоренца перпендикулярная магнитному полю оказывается не в плоскости окружности, а имеет составляющую перпендикулярную плоскости окружности.

Составляющая силы Лоренца перпендикулярная плоскости окружности выталкивает частицу из области более сильного магнитного поля.

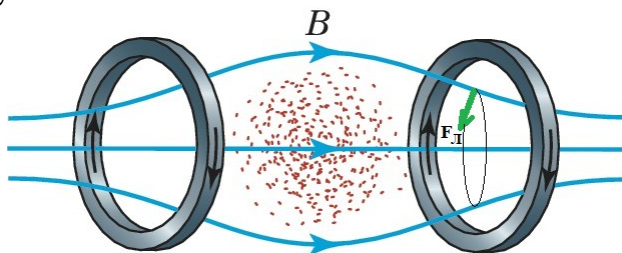


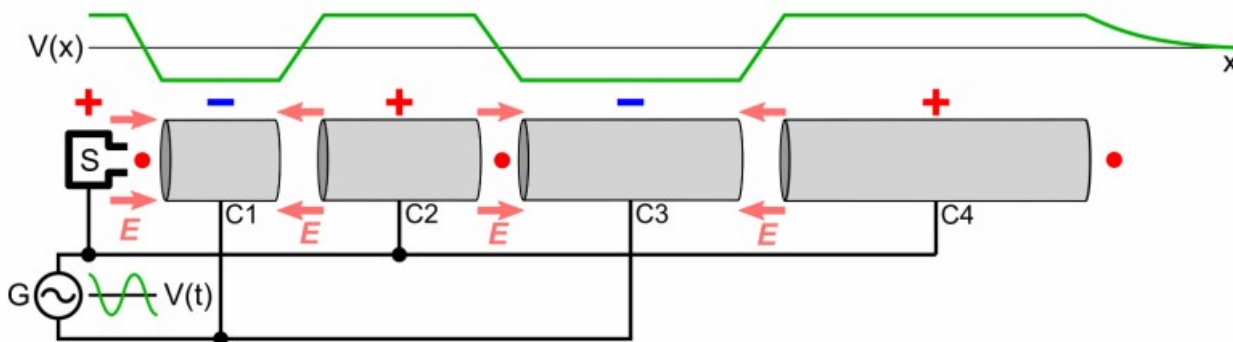
Рисунок из Большой российской энциклопедии.

Магнитные бури.

Защита биосферы Земли магнитным полем.

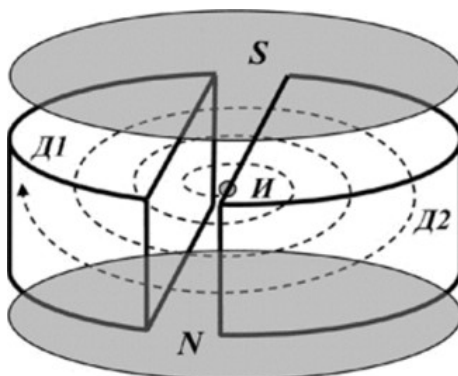
Ускорители элементарных частиц.

Линейный ускоритель. Энергия электронов до 21.5 ГэВ.



[https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейный\\_ускоритель](https://ru.wikipedia.org/wiki/Линейный_ускоритель)

Циклотрон.



[https://studme.org/172074/matematika\\_himiya\\_fizik/tsiklotron](https://studme.org/172074/matematika_himiya_fizik/tsiklotron)

D1 и D2 — дуанты.

$$m \frac{V^2}{R} = eVB \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{eB}{m} \text{ — циклотронная частота.}$$

$$R = \frac{V}{\Omega} = \frac{mV}{eB} \text{ — в постоянном магнитном поле циклотрона радиус орбиты}$$

электрона возрастает с увеличением скорости электрона.

В релятивистском случае  $\frac{d\vec{p}}{dt} = e[\vec{V}, \vec{B}]$ , откуда  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \left[ -\frac{e\vec{B}}{m}, \vec{p} \right]$ . Сравним это равенство со скоростью движения точки на поверхности вращающегося твердого тела  $\frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ . В результате сравнения получаем прежнее выражение  $\Omega = \frac{eB}{m}$ , только масса  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$  зависит от скорости  $V$ .

**Синхрофазотрон.** В синхрофазотроне при ускорении частицы сохраняется радиус орбиты заряженной частицы за счет увеличения поворачивающего частицу магнитного поля.

$$R = \frac{V}{\Omega} = \frac{m}{eB} V \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m}{eR} V = \frac{m_0 V}{eR \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Для ультрарелятивистских частиц частота ускоряющего поля почти не зависит от энергии частиц, так как период обращения частиц примерно равен длине окружности орбиты деленной на скорость света.

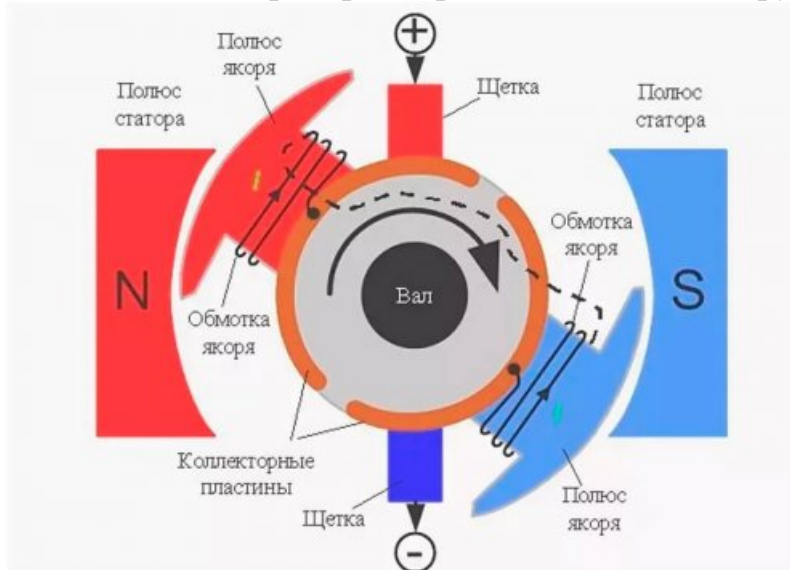
### **Электродвигатель постоянного тока.**

Электродвигатель постоянного тока состоит из неподвижной статорной обмотки, которую можно заменить постоянным магнитом, и из нескольких обмоток, закрепленных на роторе двигателя. На роторные обмотки со стороны неподвижного источника постоянного напряжения подается ток через щеточно-коллекторный узел. Магнитное поле статорной обмотки направлено перпендикулярно оси вращения ротора. Магнитный дипольный момент  $\vec{m} = I\vec{S}$ , где  $\vec{S}$  — вектор площадки, подключенной к питанию роторной обмотки с током стремится повернуться вдоль магнитного поля статорной обмотки  $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ .





Щёточно-коллекторный узел состоит из коллектора (набора медных контактов, расположенных на роторе) и угольных щёток (скользящих контактов, расположенных вне ротора и прижатых к коллектору).



<https://samelectrik.ru/chto-takoe-kollektornyj-dvigatel-postoyannogo-toka.html>

Если бы на роторе была одна обмотка с постоянным током, то дипольный момент этой рамки с током вместе с ротором стремился бы повернуться вдоль магнитного поля для минимизации энергии магнитного диполя в магнитном поле  $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ . Рамка с током повернулась бы и остановилась. Но, когда рамка с током приближается к положению устойчивого равновесия, скользящие контакты отсоединяются от этой рамки и подсоединяются к следующей рамке (следующей обмотке ротора), для которой момент сил близок к максимальному значению. И вращение ротора продолжается.

### **Вентильные электродвигатели.**

Современные двигатели постоянного тока — вентильные электродвигатели. В простейшем вентильном электродвигателе постоянного тока на роторе закреплен постоянный магнит, полюса которого направлены перпендикулярно оси вращения ротора. Две статорные обмотки подключаются к источнику постоянного напряжения по очереди с помощью электронных ключей — вентилях, образуя в области ротора вращающееся магнитное поле, направленное перпендикулярно оси вращения ротора. Какую именно из статорных обмоток нужно подключить в данный момент времени, и в какую сторону нужно пустить ток через эту обмотку определяется положением ротора. То есть скорость вращения магнитного поля статора подстраивается под скорость вращения ротора. Положение ротора определяется по направлению магнитного поля, создаваемого постоянным магнитом вращающегося ротора.

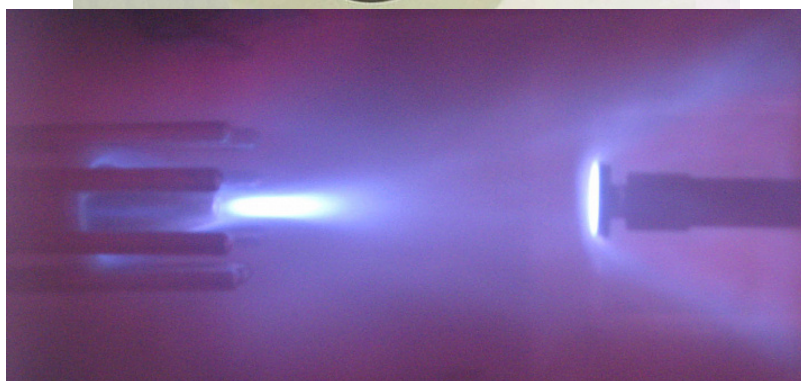
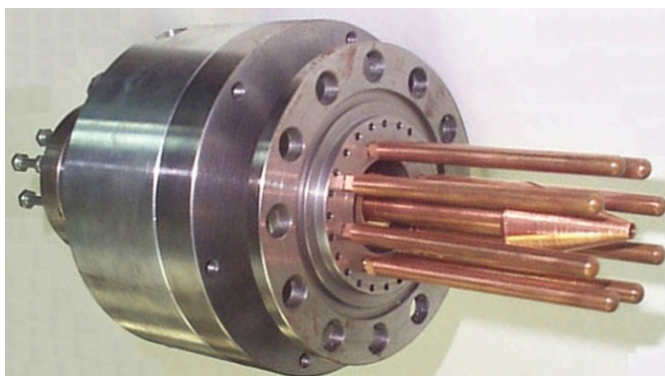


<https://aliexpress.ru/item/4001196970364.html>

### **Магнитоплазменный компрессор.**

Шесть электродов укреплены перпендикулярно изолирующему диску и имеют одинаковый потенциал. В центре диска установлен еще один электрод, например, заземленный.

На шесть электродов подают высоковольтный мощный короткий импульс напряжения. Газ пробивается на центральный электрод. Сильный кратковременный ток создает сильное магнитное поле вокруг центрального электрода. Магнитное поле тока действует на этот же ток в газе с силой Ампера, в системе СИ:  $\vec{F} = I \left[ d\vec{l}, \vec{B} \right]$ . Эта сила выстреливает плазму разряда от диска изолятора.



<http://www.itmo.by/institute/equipment/magnitoplazmennyy-kompressor-kompaktnoy-geometrii-mpk-kg/>

### Распространение сигналов в коаксиальном кабеле.

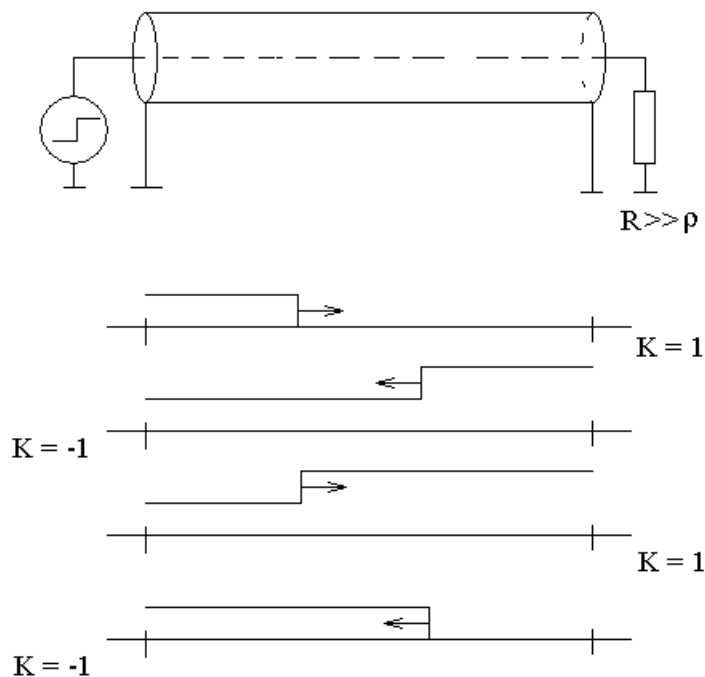
$K = \frac{Z - \rho}{Z + \rho}$  — комплексный коэффициент отражения по напряжению от

нагрузки с импедансом  $Z$ , подключенной к коаксиальному кабелю с волновым сопротивлением  $\rho$ , где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,  $L$  — индуктивность кабеля,  $C$  — емкость кабеля.

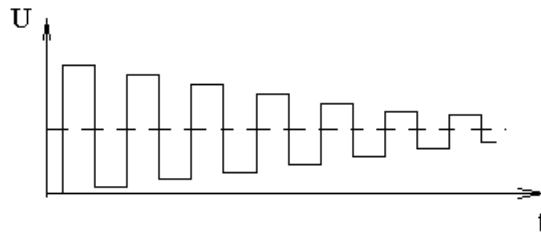
Для подавления многократных отражений от концов коаксиального кабеля в высокочастотных цепях принято стремиться к тому, чтобы выходное сопротивление источника сигнала было равно волновому сопротивлению кабеля, и сопротивление нагрузки было бы равно волновому сопротивлению кабеля.

Если сопротивление источника сигнала мало, а сопротивление нагрузки на другом конце кабеля велико, то на выходе схемы возникает дребезг напряжения при быстром изменении напряжении на входе.

Пусть на вход схемы поступила ступенька напряжения. Эта ступенька не сразу появляется на выходе, а бежит по коаксиальному кабелю со скоростью света. Добежав до конца кабеля, ступенька отражается от высокоомной нагрузки ( $K = 1$ ) и бежит обратно. От низкоомного выходного сопротивления источника сигнала ступенька отражается в противофазе ( $K = -1$ ) и бежит направо к нагрузке, и так далее.



Напряжение на нагрузке, как функция времени примет следующий вид. Здесь пунктирное напряжение — значение напряжения входной ступеньки.



Затухание дребезга связано с тем, что отражение от концов кабеля не совсем единичное.

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ.

Если длина волны  $\lambda$ , то  $\frac{1}{\lambda}$  — пространственная частота волны, а  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

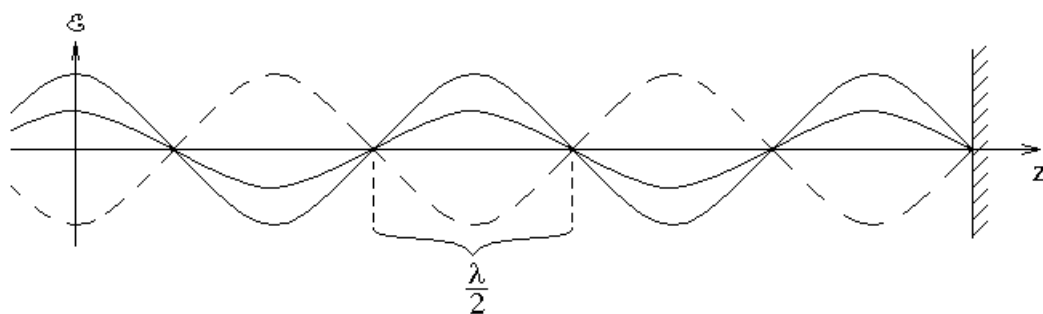
— циклическая пространственная частота,  $\vec{k}$  — волновой вектор, направление которого в вакууме совпадает с направлением распространения волны. Фаза монохроматической волны  $\varphi = (\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0$ , где  $\omega$

— циклическая частота волны,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  — период волны. В таком случае  $k_x$  —

циклическая пространственная частота по оси X,  $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$  — пространственный

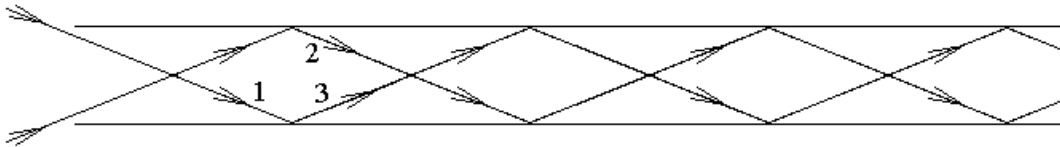
период волны по оси X.

В курсе оптики будет доказано, что электромагнитные волны в вакууме поперечны в том смысле, что и электрическое и магнитное поле поперечно направлению распространения. Если волна распространяется между двумя металлическими зеркалами перпендикулярно этим зеркалам, то образуется стоячая волна.



Граничное условие на металлической поверхности  $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$  с учетом того, что в металле напряженность электрического поля равна нулю, означает, что на поверхности зеркала образуется узел стоячей волны — место, где амплитуда поля  $\vec{E}$  равна нулю. То есть между зеркалами укладывается целое число полуволин. Одновременно с узлом поля  $\vec{E}$  на зеркале образуется пучность магнитного поля  $\vec{H}$  стоячей волны.

Рассмотрим пару волн между параллельными металлическими зеркалами. Пару волн, которые падают на эти зеркала под некоторым углом.



Пусть ось  $Z$  направлена горизонтально направо, а ось  $Y$  — перпендикулярно зеркалам. Составляющая волнового вектора  $\vec{k}$  вдоль оси  $Y$  равна  $k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}$ , где  $\lambda_y$  — пространственный период каждой волны вдоль оси  $Y$ .

Между зеркалами должно укладываться целое число пространственных полупериодов. Пусть расстояние между зеркалами равно  $b$ , тогда  $b = m \frac{\lambda_y}{2}$ , где

$m$  — так называемый индекс моды. Тогда  $k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} = m \frac{\pi}{b}$ .

Если поле  $\vec{E}$  в каждой из двух волн направлено перпендикулярно плоскости рисунка, то целое число  $m$  может принимать значения  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Если же поле  $\vec{E}$  направлено в плоскости рисунка, то добавляется еще одно возможное значение  $m = 0$ , когда есть поле одной волны, и оно распространяется вдоль оси  $Z$ . В этом случае условие  $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$  также выполнено.

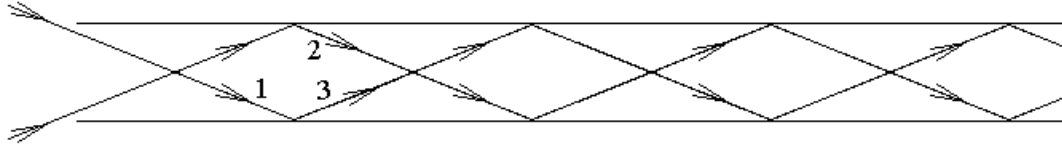
Рассмотрим теперь поле в металлическом (проводящем) волноводе прямоугольного сечения. Пусть ось  $Z$  направлена вдоль оси волновода, а оси  $X$  и  $Y$  направлены по сторонам прямоугольника сечения волновода.

На внутренней поверхности волновода должно выполняться граничное условие  $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$ . Если поверхность волновода — проводник, то на поверхности проводника  $E_\tau = 0$ . По этой причине в волноводе не может распространяться обычная плоская монохроматическая волна вдоль оси волновода (ТЕМ-волна — поперечная по электрическому полю  $\mathbf{E}$  и по магнитному полю  $\mathbf{H}$ ), а в стекловолокне — может.

Для ТЕМ-волны распространяющейся вдоль оси  $Z$  амплитуда волны в разных точках одинаковая, но на одной поверхности волновода окажется  $E_x = 0$ , а на другой —  $E_y = 0$ . В результате  $E = 0$ , и волна невозможна.

Чтобы представить себе волну в прямоугольном волноводе вернемся к рисунку с волной между двумя металлическими зеркалами





и представим себе, что пара изображенных лучей наклонена к нам относительно плоскости рисунка. Через некоторое время эта волна упрется в металлическое зеркало параллельное плоскости рисунка и отразится. Получится пара лучей наклоненная от нас относительно плоскости рисунка. В общем случае всего получается четыре луча, которые вместе формируют одну волну. В частном случае, если пара лучей лежит в плоскости рисунка, то останется только пара лучей.

Рассмотрим один из этих четырех лучей, рассмотрим плоскость фронта соответствующей лучу волны перпендикулярную лучу и рассмотрим плоскость перпендикулярную оси волновода. Две плоскости пересекаются по некоторой линии. Пусть вектор  $\vec{E}$  рассматриваемого луча направлен вдоль этой линии в каждый момент времени. Это линейная поляризация волны. Тогда вектор  $\vec{E}$  не имеет проекции вдоль оси волновода. При отражении этого луча от каждой из четырех границ волновода параллельных оси волновода не может появиться составляющая вектора  $\vec{E}$  вдоль оси волновода, так как для направления вдоль оси волновода в каждый момент времени выполняется граничное условие  $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$ . В результате ни один из четырех лучей, образующихся при отражениях от границ волновода, не будет иметь составляющей поля  $\vec{E}$  вдоль оси волновода. Составляющее же этой волне магнитное поле  $\vec{H}$  будет иметь отличную от нуля составляющую вдоль оси волновода. Такую волну из этих четырех рассматриваемых лучей называют  $H$  волной.

Если поменять местами направления полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , то получится  $E$  волна с отличной от нуля составляющей поля  $\vec{E}$  вдоль оси волновода.

$E$  волна — есть составляющая вектора  $E$  вдоль оси волновода,

$H$  волна — есть составляющая вектора  $H$  вдоль оси волновода.

Волны в волноводе в каждый момент времени имеют гармоническую зависимость поля  $E$  и поля  $H$  от каждой из трех пространственных координат. Вдоль каждой из поперечных координат укладывается целое число гармонических полупериодов. Соответственно, волны  $E$  и  $H$  имеют пару поперечных индексов моды. Например, волна  $H_{12}$  имеет составляющую поля  $H_z$  вдоль оси волновода, и для каждой составляющей поля  $E$  и поля  $H$  укладывается один полупериод по оси  $X$  и два полупериода по оси  $Y$ .

Пусть по оси  $X$  волновод имеет протяженность от нуля до  $a$ , а по оси  $Y$  — от нуля до  $b$ . Введем обозначения  $k_x = m \frac{\pi}{a}$  — пространственная циклическая частота по оси  $X$  с учетом того, что по оси  $X$  от нуля до  $a$  укладывается целое число  $m$  полупериодов. Аналогично —  $k_y = n \frac{\pi}{b}$ . Будем считать, что  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ , где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число.

Решая уравнение Гельмгольца методом разделения переменных в декартовой системе координат с учетом граничных условий  $E_\tau = 0$  можно получить следующие решения.

$E$  волна или  $E_{mn}$  волна в системе СГС имеет следующий вид

$$E_{zmn} = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$E_{xmn} = -i \frac{k_x k_z}{k^2 - k_z^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$E_{ymn} = -i \frac{k_y k_z}{k^2 - k_z^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$H_{zmn} = 0$$

$$H_{xmn} = i \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k_y k_z}{k^2 - k_z^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$H_{ymn} = -i \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k_x k_z}{k^2 - k_z^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$H$  волна или  $H_{mn}$  волна имеет следующий вид

$$H_{zmn} = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$H_{xmn} = i \frac{k_x k_z}{k^2 - k_z^2} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$H_{ymn} = i \frac{k_y k_z}{k^2 - k_z^2} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$E_{zmn} = 0$$

$$E_{xmn} = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k_y k_z}{k^2 - k_z^2} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$E_{ymn} = -i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k_x k_z}{k^2 - k_z^2} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

В системе СИ  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$  и  $\mu \rightarrow \mu_0 \mu$ .

Эти решения имеют низкочастотную границу. При заданных поперечных размерах волновода электромагнитное излучение ниже некоторой частоты не может распространяться в заданном волноводе. Самой низкой частоте соответствует  $H_{10}$  волна, если  $a \geq b$ . Для  $H$  волны поле  $\vec{E}$  может быть перпендикулярно одной паре ограничивающих волновод плоскостей, например, перпендикулярных оси  $Y$ . Тогда чтобы получить узлы поля  $\vec{E}$  на границах волновода перпендикулярных оси  $X$ , потребуется, чтобы вдоль этой оси укладывалась хотя бы одна полуволна, а по оси  $Y$  может быть ни одной полуволны, что соответствует индексам моды 1 и 0. Если луч идет почти перпендикулярно оси  $X$ , то  $\frac{\lambda_{\max}}{2} \approx a$ , откуда  $\lambda_{\max} \approx 2a$ , и  $\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} \approx \frac{c}{2a}$  — низкочастотная граница электромагнитного излучения в волноводе.

Более низкие частоты излучения можно пропустить только по коаксиальному кабелю, но не по полному волноводу.

### **Метод последовательных приближений вычисления квазистационарных электромагнитных полей.**

(в системе единиц СГС Гаусса)

Если электромагнитные поля изменяются во времени медленно, то уравнения Максвелла можно решать методом последовательных приближений.

Суть метода состоит в том, чтобы сначала найти решение в очень грубом приближении, затем в более точном приближении, в еще более точном, и так далее до бесконечности.

Если поля медленные, то производные по времени малы. Следовательно, производные по времени достаточно знать с меньшей относительной точностью, чем остальные слагаемые в системе уравнений Максвелла

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. .$$

Если в более грубом приближении мы знаем решение для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , то мы можем подставить это решение под знак производной  $\frac{\partial}{\partial t}$  в правую часть уравнений Максвелла и получить уравнения с неизвестными полями в левой части и заданной правой частью уравнений. Решение этих приближенных уравнений проще, чем решение точных уравнений Максвелла. Новое приближенное решение будет более точным приближением для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , чем исходное грубое приближение.

-----  
 Обсудим начальное самое грубое так называемое нулевое приближение.

В самом грубом приближении отбросим слагаемые  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в правой части уравнений Максвелла и получим уравнения:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{D}_0) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}_0) = 0 \\ \operatorname{div}(\vec{B}_0) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}_0) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$$

— система в нулевом приближении. Обозначим ее, как систему (0).

Система из четырех уравнений распадается на две независимые друг от друга системы: два уравнения задачи электростатики  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{D}_0) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}_0) = 0 \end{cases}$  и два

уравнения задачи магнитостатики  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}_0) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}_0) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$ . Только эти задачи нужно

решить для каждого момента времени. Будем считать, что мы умеем решать такие задачи и решили их.

В таком случае мы нашли нулевое приближение  $\vec{E}_0$  и  $\vec{B}_0$  для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Например, в вакууме решения можно найти, суммируя уравнения:

$$\begin{cases} d\vec{E} = \frac{\rho \cdot dV}{r^3} \vec{r} \\ d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \end{cases}$$

-----  
 Первое приближение  $\vec{E}_1$  и  $\vec{B}_1$  будем искать в виде суммы нулевого приближения  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$ , и первых поправок к нему  $\delta\vec{E}_1$  и  $\delta\vec{B}_1$ :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \delta\vec{E}_1 \\ \vec{D}_1 = \vec{D}_0 + \delta\vec{D}_1 \\ \vec{B}_1 = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}_1 \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \delta\vec{H}_1 \end{cases}$$

Для первого приближения получим уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}_1) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}_1) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}_1) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{— система (1).}$$

Рассмотрим разность систем (1)-(0). Разность имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\delta \vec{D}_1) = 0 \\ \operatorname{rot}(\delta \vec{E}_1) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\delta \vec{B}_1) = 0 \\ \operatorname{rot}(\delta \vec{H}_1) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t} \end{array} \right. .$$

Это две полностью подобные друг другу независимые задачи аналогичные задачам магнитостатики, так как дивергенция поля равна нулю, а ротор поля задан.

Будем считать, что мы умеем их решать и решили.

-----  
Аналогично для n-го приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_n = \vec{E}_{n-1} + \delta \vec{E}_n = \vec{E}_0 + \sum_{i=1}^n \delta \vec{E}_i \\ \vec{B}_n = \vec{B}_{n-1} + \delta \vec{B}_n = \vec{B}_0 + \sum_{i=1}^n \delta \vec{B}_i \\ \vec{D}_n = \vec{D}_{n-1} + \delta \vec{D}_n = \vec{D}_0 + \sum_{i=1}^n \delta \vec{D}_i \\ \vec{H}_n = \vec{H}_{n-1} + \delta \vec{H}_n = \vec{H}_0 + \sum_{i=1}^n \delta \vec{H}_i \\ \operatorname{div}(\vec{D}_n) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}_n) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}_{n-1}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}_n) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}_n) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}_{n-1}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{— система (n).}$$



Рассмотрим разность систем (n)-(n-1):

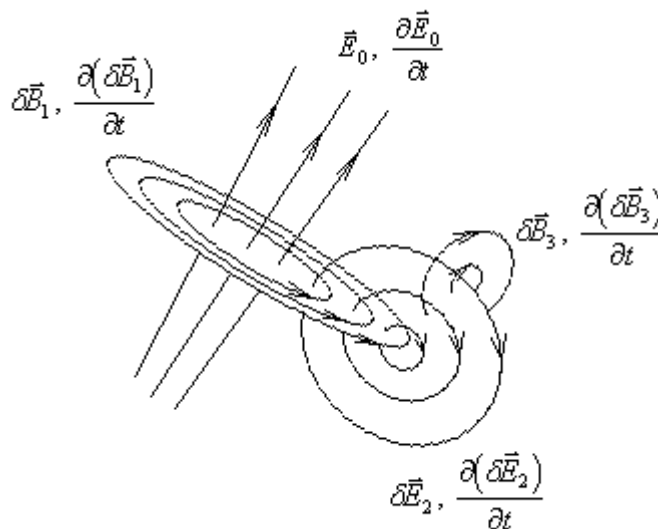
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\delta \vec{D}_n) = 0 \\ \operatorname{rot}(\delta \vec{E}_n) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial(\delta \vec{B}_{n-1})}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\delta \vec{B}_n) = 0 \\ \operatorname{rot}(\delta \vec{H}_n) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial(\delta \vec{D}_{n-1})}{\partial t} \end{array} \right.$$

Это опять две независимые задачи аналогичные задачам магнитостатики. Мы их умеем решать, и будем считать, что решили.

Таким образом, мы можем найти все поправки для любого приближения.

-----  
 Без доказательства заметим, что ряды поправок сходятся при условии  $r \ll \lambda$ , где  $r$  — размер области с полем,  $\lambda$  — длина волны поля,  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ,  $\nu$  — частота изменения электромагнитного поля.

На следующем рисунке покажем, как может выглядеть ряд поправок.

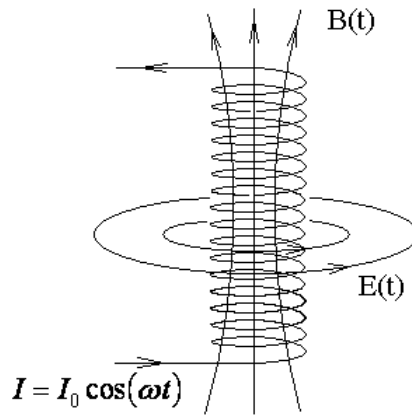


### **Задача 1.**

(в системе единиц СГС Гаусса)

В длинном соленоиде задан переменный ток  $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$ . Найти поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Решение:



В нулевом приближении (в приближении магнитостатики) внутри длинного соленоида есть однородное магнитное поле, направленное вдоль его оси:

$$B_0(t) = \frac{4\pi}{c} \cdot nI = \frac{4\pi}{c} \cdot nI_0 \cdot \cos(\omega t) \text{ — магнитное поле вдоль оси соленоида,}$$

где  $n$  — число витков на единице длины соленоида.

В нулевом приближении электрического поля нет, так как нет отличной от нуля объемной плотности зарядов:  $E_0(t) = 0$ .

-----

В следующем приближении (в первом приближении) переменное магнитное поле нулевого приближения является источником вихревого электрического поля в соответствии с уравнением Максвелла

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{rot}(\vec{E}_1) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}.$$

Это уравнение удобнее использовать в интегральной форме:

$$\oint_l E_l dl = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) \quad \Rightarrow$$

$$E_1(t) \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (B_0(t) \cdot S).$$

Подставим сюда  $B_0(t) = \frac{4\pi}{c} \cdot nI_0 \cdot \cos(\omega t)$  и получим

$$E_1(t) \cdot 2\pi r = \frac{S}{c} \cdot \frac{4\pi}{c} nI_0 \omega \cdot \sin(\omega t).$$

Внутри соленоида при  $r \leq R$  имеем  $S = \pi r^2$  и получаем

$$E_1(t) = \frac{2\pi \cdot r n I_0 \omega \cdot \sin(\omega t)}{c^2} \text{ при } r \leq R, \text{ где } R \text{ — радиус соленоида.}$$

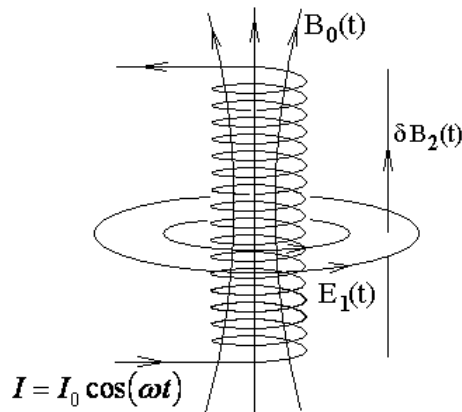
Снаружи соленоида при  $r \geq R$  получим  $S = \pi R^2$ , так как магнитное поле есть только внутри соленоида. Тогда

$$E_1(t) = \frac{2\pi \cdot R^2 n I_0 \omega \cdot \sin(\omega t)}{c^2 r} \text{ при } r \geq R.$$

-----

Обсудим теперь поправку второго приближения. Первая поправка к электрическому полю  $\delta\vec{E}_1 = \vec{E}_1$  является источником второй поправки  $\delta\vec{B}_2$ , которая добавляется к магнитному полю нулевого приближения  $\vec{B}_0$ .

$$\text{rot}(\delta\vec{B}_2) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \oint_l (\delta B_2)_l dl = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{E}_1, d\vec{S})$$

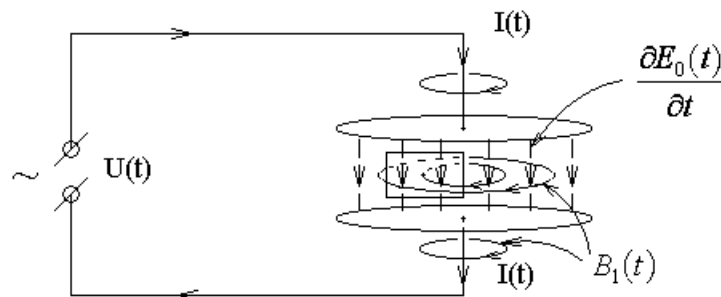


Вторая поправка  $\delta B_2(t)$  расходится при  $r \rightarrow \infty$  как  $\ln(r)$ . Поправка  $\delta B_2(t)$  расходится при  $r \rightarrow \infty$ , так как при этом не выполняется условие квазистационарности  $r \ll \lambda$ .

### Задача 2.

(в системе единиц СГС Гаусса)

Пусть плоский конденсатор подключен к источнику косинусоидального напряжения  $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ .



Пусть конденсатор представляет собой два параллельных проводящих диска.

Пусть внутри конденсатора расположена прямоугольная проводящая рамка с большим сопротивлением. Одна из сторон рамки расположена по оси конденсатора. Требуется найти силу тока в прямоугольной рамке.

В самом грубом нулевом приближении в конденсаторе есть только электрическое поле, направленное вдоль оси конденсатора. Производная от этого поля по времени — токи смещения Максвелла. В первом приближении

вокруг этих токов по правилу правого винта возникает магнитное поле, величину которого можно найти по теореме о циркуляции

$$B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \cdot (j_{см} \cdot \pi r^2), \text{ где } j_{см} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \text{ — плотность токов смещения. Во}$$

втором приближении переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля, которое и создает ток в рамке. Величину тока можно найти через ЭДС индукции в рамке.