<u>Экзамен. Групповая скорость волн</u> <u>(продолжение)</u>**<u>.</u>**

Пусть две плоские волны с частотами ω_1 и ω_2 распространяются в направлении оси z. Пусть разность частот мала: $\left|\omega_1-\omega_2\right|<<\omega_1$. Пусть вещественные амплитуды двух волн одинаковы и равны A_0.

Рассмотрим волны в вещественном представлении:

$$A(t,z)=A_0\cos\left(k_1z-\omega_1t\right)+A_0\cos\left(k_2z-\omega_2t\right)=$$

$$=2A_0\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}z-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}z-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right),$$

где использовано соотношение

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases}\dfrac{k_1+k_2}{2}\equiv k\\ \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\equiv\omega\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}=-\dfrac{\delta\omega}{2}\\ \dfrac{k_1-k_2}{2}=-\dfrac{\delta k}{2}=-\dfrac{dk}{d\omega}\cdot\dfrac{\delta\omega}{2}\end{cases}.$$

Тогда

$$A(t,z)=2A_0\cos\left(-\frac{dk}{d\omega}\cdot\frac{\delta\omega}{2}z+\frac{\delta\omega}{2}t\right)\cdot\cos(kz-\omega t)=$$

$$=2A_0\cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z-t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)\cdot\cos(kz-\omega t).$$

Здесь $2A_0\cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z-t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)$ — огибающая, которая медленно изменяется при изменении t или z, так как $\left|\delta\omega\right|<<\omega$.

$\cos(kz-\omega t)$ — несущая.

Для рассматриваемой формы огибающей $2A_0\cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z-t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)$ можно сказать, что $\left(\frac{dk}{d\omega}z-t\right)\frac{\delta\omega}{2}$ — это фаза огибающей. Тогда групповую скорость или скорость движения огибающей можно найти, как скорость движения поверхности равных фаз огибающей.

С этой целью продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз огибающей:

$\left(\frac{dk}{d\omega}z-t\right)\frac{\delta\omega}{2}=const$, считая координату z функцией времени, и получим

$$\left(\frac{dk}{d\omega}\cdot\frac{dz}{dt}-\frac{dt}{dt}\right)\cdot\frac{\delta\omega}{2}=0\qquad=>$$

$\frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$ — скорость движения поверхности равных фаз огибающей или скорость движения огибающей, она же по определению равна групповой скорости волн $V_{гр}$. Тогда

$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$ — групповая скорость для волны любой природы, не только для световой волны. Выражение для групповой скорости $V_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$ напоминает выражение для фазовой скорости $V_{ф} = \frac{\omega}{k}$.

Групповая скорость — это скорость передачи информации, поэтому она не может быть больше скорости света в пустоте $V_{гр} \le c$. Формально неравенство $\frac{d\omega}{dk} > c$ — возможно, но при этом условии световой импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

<u>Факультативно. Обычно групповая скорость света меньше фазовой скорости.</u>

Это следует из неравенства $\frac{dn}{d\omega} > 0$, которое называют условием нормальной дисперсии. Это неравенство будет обосновано позднее.

Дисперсия света — это зависимость показателя преломления от частоты или от длины волны.

$V_{ф} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}$ => $k = \frac{n\omega}{c}$, тогда

$$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)} = c\frac{d\omega}{d(n\omega)} = \frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}} < \frac{c}{n} = V_{ф} \quad =>$$

$V_{гр} < V_{ф}$ при условии нормальной дисперсии $\frac{dn}{d\omega} > 0$.

<u>Экзамен. Поперечность световых волн.</u>

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = a$.

Возьмем от него производную и получим $y'' = 0$.

Общее решение второго уравнения имеет вид: $y = Ax + B$.

Не все решения второго уравнения являются решениями первого уравнения. Лишние решения появились в результате дифференцирования первого уравнения, так как при этом часть информации о решениях была утеряна.

Вернемся к рассмотрению волнового уравнения.

Волновое уравнение для вектора $\vec{E}$ было получено в результате дифференцирования, то есть применения операции $rot(\cdot)$, к одному из уравнений системы Максвелла. Следовательно, не все решения волнового уравнения являются решениями системы уравнений Максвелла.

Подставим вещественное решение волнового уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в виде плоских монохроматических волн в уравнения Максвелла и проверим, являются ли они решениями уравнений Максвелла.

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right) \qquad \vec{B} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right)$$

Для нас будет важно, что оба поля зависят от координат и времени только через их комбинацию в виде $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту комбинацию буквой $\varphi = \left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы φ_0, которая спрятана в комплексных амплитудах $\tilde{\vec{E}}_0$ и $\tilde{\vec{B}}_0$ и может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t} = -\omega\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

То есть для вещественной плоской монохроматической волны все равно электрического или магнитного поля имеем:

$$\frac{\partial\cdot}{\partial t} = -\omega\frac{d\cdot}{d\varphi}.$$

Рассмотрим теперь производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} = k_x\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial\cdot}{\partial x} = k_x\frac{d\cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_x k_x\frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_y k_y\frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_z k_z\frac{d}{d\varphi} = \vec{k}\frac{d}{d\varphi}.$$

Теперь вернемся к рассмотрению уравнений Максвелла для вещественных плоских монохроматических волн.

$$div\left(\vec{D}\right)=0 \iff \left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)=0 \Rightarrow \left(\vec{k}\frac{d}{d\varphi},\vec{D}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{k},\vec{D}\right)=const.$$

Константа в правой части равенства не зависит ни от координат, ни от времени. Рассмотрим это равенство в некоторый момент времени, а затем рассмотрим его же в другой момент времени через половину периода световой волны. Каждая проекция вектора $\vec{D}$ через половину периода поменяет знак, вектор $\vec{k}$ от времени не зависит, следовательно, левая часть равенства поменяет знак через половину периода. Правая часть равенства тоже обязана поменять знак через половину периода, но она не может измениться, так как она — константа. Такое возможно только при условии, что константа равна нулю. Тогда $\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0$.

Следовательно

$$\vec{D}\perp\vec{k} \Rightarrow \vec{E}\perp\vec{k}.$$

Аналогично из равенства $div\left(\vec{B}\right)=0$ получаем $\vec{B}\perp\vec{k}$.

Рассмотрим равенство $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$

$$\left[\vec{k}\frac{d}{d\varphi},\vec{E}\right]=-\frac{1}{c}(-\omega)\frac{d}{d\varphi}\vec{B} \Rightarrow \frac{d}{d\varphi}\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega}{c}\vec{B}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\left[\vec{k},\vec{E}\right]-\frac{\omega}{c}\vec{B}\right\}=0 \Rightarrow \left[\vec{k},\vec{E}\right]-\frac{\omega}{c}\vec{B}=const \Rightarrow$$

$$\left[\vec{k},\vec{E}\right]-\frac{\omega}{c}\vec{B}=0 \Rightarrow \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\vec{B} \Rightarrow \vec{E}\perp\vec{B}.$$

Тогда векторы $\vec{E},\vec{B},\vec{k}$ взаимно ортогональны в каждой точке пространства и в каждый момент времени. Из равенства $\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\vec{B}$ следует, что векторы $\vec{k},\vec{E},\vec{B}$ образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. При циклической перестановке правая тройка остается правой тройкой $\vec{E},\vec{B},\vec{k}$.

Сравним с тройкой векторов $\vec{E},\vec{H},\vec{S}$, где $\vec{S}$ — вектор Пойнтинга. Из равенства $\frac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\vec{S}$ с учетом ортогональности векторов $\vec{E},\vec{H}$ получим, что векторы $\vec{E},\vec{H},\vec{S}$ тоже образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Следовательно

$\vec{k}\uparrow\uparrow\vec{S}$ — в прозрачной изотропной среде.

Позднее при рассмотрении кристаллооптики мы получим, что в анизотропной среде векторы $\vec{k}$ и $\vec{S}$ не параллельны. При этом вектор $\vec{k}$

показывает направление движения поверхности равных фаз, а вектор $\vec{S}$ показывает направление движения энергии электромагнитного поля.

В результате рассмотрения этого вопроса приходим к выводу. Для того, чтобы плоские электромагнитные волны были бы решением уравнений Максвелла необходимо, чтобы волны были поперечны $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \end{cases}$, а электрическое поле ортогонально магнитному полю $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Для того чтобы плоские электромагнитные волны были решением системы уравнений Максвелла, требуется выполнение определенного соотношения еще и для длин векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, которое обсуждается в следующем вопросе.

Экзамен. Соотношение полей *E* и *H* в бегущей световой волне.

Из условия $\vec{k} \perp \vec{E}$ получим $\sin\left(\vec{k},\vec{E}\right)=1$. Тогда $\left\|\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right\| = kE$. Применим этот результат к левой части равенства $\left[\vec{k},\vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{B}$ и получим $kE = \frac{\omega}{c}B$ =>

$$cE = \frac{\omega}{k}B \quad => \quad cE = V_{ф}B \quad => \quad cE = \frac{c}{n}B \quad => \quad B = nE \quad =>$$

$$B = \sqrt{\varepsilon\mu}\,E \quad => \quad \mu H = \sqrt{\varepsilon\mu}\,E \quad => \quad \sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H$$

$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$ — в бегущей световой волне энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

В системе СИ: $\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$ <=> $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu_0\mu}\,H$.

В вакууме решение волнового уравнения в виде плоской монохроматической волны является решением уравнений Максвелла только при выполнении условий $\begin{cases} E = B \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$ в каждой точке и в каждый момент времени.

Если хотя бы одно из двух условий не выполнено, то через эту точку в пространстве проходит не одна волна, а несколько волн в разных направлениях.

Экзамен. Интенсивность света.

Об интенсивности света говорят только либо для одной бегущей волны, либо для суммы волн, которые бегут почти в одном направлении.

По определению интенсивности:

$I \equiv \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle_t$, где $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга.

В системе СИ $I \equiv \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle_t$ и $\vec{S} = \left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Интенсивность света I — усредненная по времени плотность потока энергии, то есть энергия, которая в единицу времени протекает через единицу площади, если площадка перпендикулярна свету.

Под временем усреднения подразумевают время реакции приемника света. Ни один приемник света не успевает реагировать на каждое оптическое колебание в отдельности. В теории удобно считать, что время усреднения бесконечно.

Выразим интенсивность через вещественные поля E и H:

$$I \equiv \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle \left|\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right| \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle EH \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle E\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E \right\rangle_t = \frac{c\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t$$

$I = \dfrac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t$ — интенсивность света выражается через электрическое поле, а не через магнитное, так как воздействие света на вещество в основном сводится к воздействию именно электрического поля.

$$\left\langle E^2 \right\rangle_t = \left\langle E_0^2\cdot\cos^2(\omega t) \right\rangle_t = \frac{1}{2}E_0^2 = \frac{1}{2}\left|\tilde{E}_0\right|^2 \qquad \Rightarrow$$

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2.$$

Интенсивность света обычно рассматривается в вакууме, в этом случае выражение для интенсивности упрощается: $I = \dfrac{c}{4\pi}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \dfrac{c}{8\pi}E_0^2 = \dfrac{c}{8\pi}\left|\tilde{E}_0\right|^2$.

В системе СИ: $I = \dfrac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \dfrac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}E_0^2 = \dfrac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\dfrac{E_0^2}{2}$.

Поляризация света.
Экзамен. Линейная поляризация.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси z, тогда $\vec{S}\uparrow\uparrow\vec{k}\uparrow\uparrow\vec{e}_z$.

Электромагнитные волны поперечны, следовательно, $\vec{E}\perp\vec{k}\uparrow\uparrow\vec{e}_z$. Тогда вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости x, y и может быть выражен следующим образом $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$.

Пусть $E_y = 0$ во все моменты времени, тогда $\vec{E} = E_x\vec{e}_x$, то есть вектор $\vec{E}$ все время направлен вдоль одной линии.

Такой свет называют линейно поляризованным. Эту же поляризацию называют плоской поляризацией. При этом плоскость поляризации — это плоскость векторов $\vec{E}$ и $\vec{k}$.

Для линейной поляризации удобно ввести единичный вектор поляризации

$$\vec{e}_p \parallel \vec{E} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{e}_p \perp \vec{k}.$$

С учетом единичного вектора поляризации $\vec{e}_p$ получаем для линейной поляризации света

$\tilde{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)}$, где

E_0 — вещественная амплитуда света. Чуть позже выясниться, что в таком же виде может быть выражен свет и любой другой поляризации.

<u>Факультативно. Старое определение плоскости поляризации.</u>

Заметим, что исторически плоскостью поляризации называли не плоскость векторов $\vec{E}$ и $\vec{k}$, а перпендикулярную ей плоскость векторов $\vec{B}$ и $\vec{k}$.

Причина в том, что поляризованный свет впервые был получен при отражении света, падающего на границу сред под углом Брюстера. Плоскостью поляризации отраженного света первоначально называли плоскость падения света.

Сегодня плоскость поляризации связана с вектором $\vec{E}$, так как на среду действует именно вектор $\vec{E}$, а не вектор $\vec{B}$.