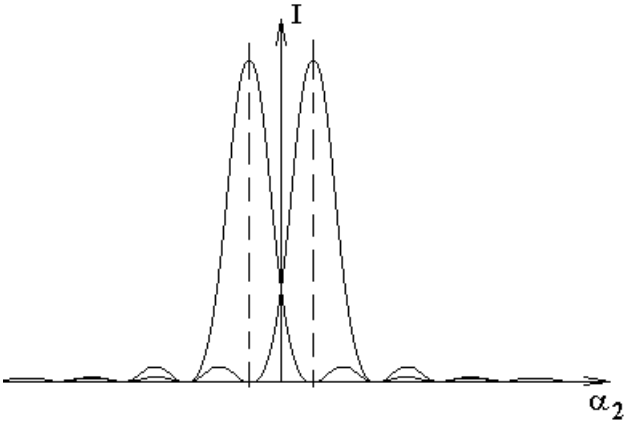
Экзамен. Спектральное разрешение дифракционной решетки. Критерий Рэлея.

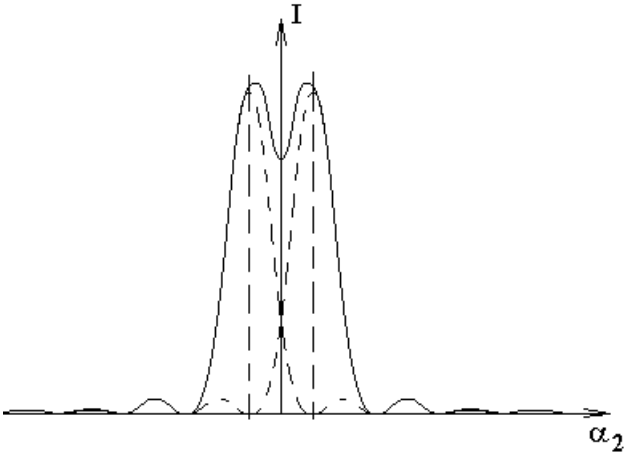
Пусть в спектре света, падающего на решетку, есть две близкие спектральные линии. В каких случаях дифракционная решетка позволяет определить, что линии две, а в каких не позволяет?

По критерию Рэлея спектральные линии находятся на пороге разрешения, если главный дифракционный максимум одной спектральной линии совпадает с первым нулем интенсивности другой. Имеется в виду ноль интенсивности соседний с главным дифракционным максимумом, и подразумевается, что интенсивности двух спектральных линий равны.

Рассмотрим два графика зависимости интенсивности света от угла дифракции для каждой из двух спектральных линий на пределе разрешения.



Если спектральные линии близки, то нет возможности различить, где свет одной линии, а где — другой. Регистрируется только суммарная интенсивность двух спектральных линий. На пороге разрешения по критерию Рэлея контур суммарной интенсивности имеет в центре примерно 20%-ый провал.



Провал суммарного контура интенсивности в 20% — второе определение критерия Рэлея для предела спектрального разрешения.

Эти два определения критерия Рэлея для разрешающей способности оптических приборов справедливы не только для дифракционных решеток, но и для других оптических устройств. Если зависимость интенсивности после максимума не опускается до нуля, то пользуются вторым определением

критерия Рэлея для разрешающей способности оптического прибора (глубина провала 20%).

Для главного дифракционного максимума разность хода для соседних штрихов решетки кратна длине волны света

$$\Delta = m\lambda \qquad => \qquad \delta\Delta = m\,\delta\lambda$$

Пусть решетка содержит N штрихов. Рассмотрим направление дифракции, для которого разность фаз между первым и последним штрихом равна 2π, и картина сложения амплитуд на комплексной плоскости представляет собой окружность. В этом направлении дифракции суммарная амплитуда поля всех штрихов решетки равна нулю. Разность фаз в этом направлении дифракции от соседних штрихов $\delta\varphi = \dfrac{2\pi}{N}$, а разность хода $\delta\Delta = \lambda\dfrac{\delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{\lambda}{N}$. Подставим эту разность хода в равенство $\delta\Delta = m\,\delta\lambda$ и получим

$$=> \quad \frac{\lambda}{N} = m\,\delta\lambda \quad => \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}.$$

Этому изменению $\delta\lambda$ длины волны λ соответствует такое изменение направления дифракции, которое для одной длины волны соответствует изменению интенсивности дифрагированной волны от главного дифракционного максимума до ближайшего нуля. По критерию Рэлея это изменение длины волны равно спектральному разрешению решетки.

В результате получаем, что относительное спектральное разрешение дифракционной решетки

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN},$$

где m — порядок дифракции, N — общее число штрихов решетки.

<u>Факультативно. Аппаратная функция дифракционной решетки.</u>

Аппаратный контур — это отклик прибора в ситуации, когда идеальный прибор должен откликнуться бесконечно узким пиком. Пусть у нас есть некоторый измерительный прибор, результатом измерения которого является некоторая функция. Пусть у нас есть некоторый идеальный сигнал на входе прибора, на который идеально работающий прибор должен выдать функцию в виде идеально узкого пика, пропорционального дельта-функции Дирака. Реальный, а не идеальный, прибор выдает на выходе некоторый узкий контур вместо бесконечно узкого пика. Этот узкий контур и называют аппаратной функцией прибора.

Найдем аналитическое выражение зависимости интенсивности света от угла дифракции на решетке в случае, когда спектр света на входе решетки имеет вид дельта-функции Дирака — монохроматический свет. Это и будет аппаратная функция дифракционной решетки.

Пусть амплитуда света в точке наблюдения от нижнего штриха решетки равна $\tilde{E}_1$. От следующего штриха решетки свет придет в точку наблюдения с таким же модулем амплитуды, но с другой фазой. Фазовый сдвиг $\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ определяется разностью хода $\Delta = d \cdot \left(\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right)$, где d — шаг решетки, α_1 — угол падения света на решетку, α_2 — угол дифракции:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = k\Delta = kd \cdot \left(\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right).$$

Амплитуда света в точке наблюдения от второго штриха решетки равна $\tilde{E}_1 e^{i\,\delta\varphi}$, от третьего — $\tilde{E}_1 e^{2i\,\delta\varphi}$, от четвертого — $\tilde{E}_1 e^{3i\,\delta\varphi}$, от N-го штриха — $\tilde{E}_1 e^{(N-1)i\,\delta\varphi}$. Амплитуда света от всей решетки:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_1 e^{i\,\delta\varphi} + \tilde{E}_1 e^{2i\,\delta\varphi} + \tilde{E}_1 e^{3i\,\delta\varphi} + \ldots + \tilde{E}_1 e^{(N-1)i\,\delta\varphi}$$

где N — число штрихов решетки.

Складывая, как отрезок геометрической прогрессии, получаем:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 \frac{1 - e^{Ni\,\delta\varphi}}{1 - e^{i\,\delta\varphi}}.$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату модуля амплитуды:

$$I = I_1 \left| \frac{1 - e^{Ni\,\delta\varphi}}{1 - e^{i\,\delta\varphi}} \right|^2 = I_1 \frac{\left(1 - \cos(N\,\delta\varphi)\right)^2 + \left(\sin(N\,\delta\varphi)\right)^2}{\left(1 - \cos(\delta\varphi)\right)^2 + \left(\sin(\delta\varphi)\right)^2} = I_1 \frac{\sin^2\left(N\frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)},$$

здесь I — интенсивность света при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке в зависимости от угла дифракции α_2, $I_1 = I_0 \left(\frac{\sin(U)}{U}\right)^2$ — величина интенсивности света при дифракции Фраунгофера на одной щели шириной a (при дифракции на одном штрихе решетки).

Ранее мы обсуждали, что при наблюдении дифракции Фраунгофера на одной щели и нормальном падении света на экран с щелью шириной D величина $U = \frac{1}{2}kD \cdot \sin(\alpha)$, где α — угол дифракции. При рассмотрении дифракционной решетки $D = a$ — ширина прозрачной части штриха, а с учетом отличного от нуля угла падения света на решетку α_1 получим $U = \frac{1}{2}ka\left(\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)\right)$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, α_2 — угол дифракции.

Сравним $U=\frac{1}{2}ka\left(\sin\left(\alpha_1\right)-\sin\left(\alpha_2\right)\right)$ с величиной $\frac{\delta\varphi}{2}=\frac{1}{2}kd\cdot\left(\sin\left(\alpha_1\right)-\sin\left(\alpha_2\right)\right)$ — половиной запаздывания по фазе между световыми волнами от двух соседних штрихов решетки с периодом d. Из сравнения видно, что $U=\frac{a}{d}\cdot\frac{\delta\varphi}{2}$. Тогда

$$I=I_1\frac{\sin^2\left(N\frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)}=I_0\left(\frac{\sin\left(U\right)}{U}\right)^2\frac{\sin^2\left(N\frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)}=I_0\frac{\sin^2\left(\frac{a}{d}\frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{a}{d}\frac{\delta\varphi}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\left(N\frac{\delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)},$$

где $\delta\varphi=kd\cdot\left(\sin\left(\alpha_1\right)-\sin\left(\alpha_2\right)\right)$ — разность фаз световых волн от соседних штрихов дифракционной решетки, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, N — общее число штрихов решетки, d — шаг или период решетки, a — ширина прозрачной части штриха, α_1 — угол падения света на решетку, α_2 — угол дифракции, для которого вычисляется интенсивность света I, I_0 — интенсивность света в направлении нулевого порядка дифракции, то есть при условии $\alpha_2=\alpha_1$.

<u>Экзамен. Дифракционная решетка с отсутствующими четными главными дифракционными максимумами.</u>

Рассмотрим решетку, у которой прозрачная и непрозрачная части штриха равны по ширине:

$$a=b=\frac{d}{2}.$$

При нормальном падении света на решетку $\alpha_1=0$ рассмотрим второй порядок дифракции $m=2$:

$$\begin{cases} d\cdot\left(\sin\left(\alpha_1\right)-\sin\left(\alpha_2\right)\right)=m\lambda \\ m=2 \\ \alpha_1=0 \end{cases} \quad => \quad -d\cdot\sin\left(\alpha_2\right)=2\lambda \quad =>$$

$$\sin\left(\alpha_2\right)=-\frac{2\lambda}{d}.$$

Свет на каждой прозрачной части штриха решетки шириной α дифрагирует, как на одной щели:

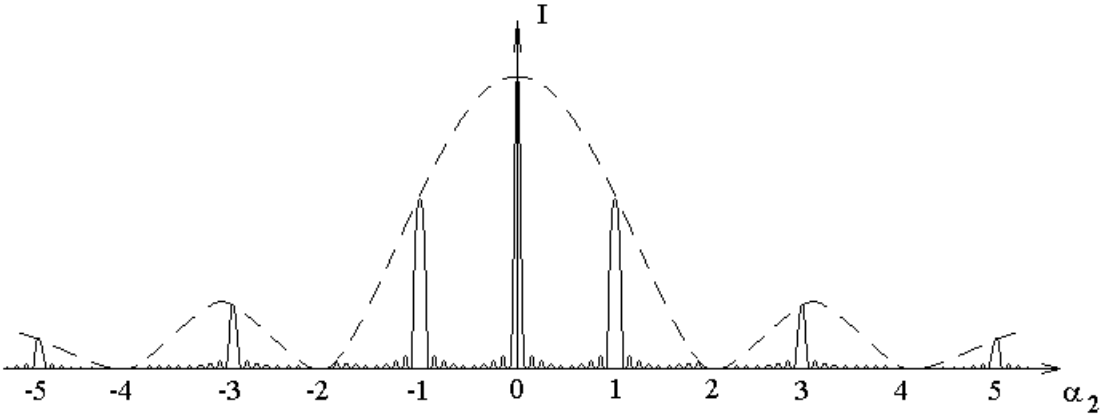
$$I\left(\alpha_2\right)=I_0\left(\frac{\sin\left(U\right)}{U}\right)^2, \text{ где } U=\frac{1}{2}ka\cdot\sin\left(\alpha_2\right).$$

Тогда с учетом $\sin\left(\alpha_2\right)=-\frac{2\lambda}{d}$ получим $\left|U\right|=\frac{1}{2}ka\cdot\frac{2\lambda}{d}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{2\lambda}{d}=\pi$,

$$=> \quad \sin(U) = 0 \qquad => \quad I(\alpha_2) = I_0 \left(\frac{\sin(U)}{U} \right)^2 = 0.$$

Следовательно, второй главный дифракционный максимум имеет нулевую интенсивность для решетки с одинаковой шириной прозрачной и непрозрачной части штриха $a = b = \frac{d}{2}$.

Аналогично можно показать, что для такой решетки пропадают все четные дифракционные максимумы кроме нулевого и для любого угла падения света, а не только при рассмотренном нормальном падении. Пример зависимости интенсивности монохроматического света от угла дифракции для такой решетки приведен на следующем рисунке.



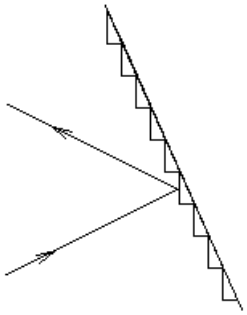
Здесь пунктирной линией изображена зависимость интенсивности от угла дифракции для одного штриха решетки. Главные дифракционные максимумы решетки пронумерованы. Из рисунка видно, что четные главные максимумы попадают на нули интенсивности дифракции на одной щели. Этот график представляет собой аппаратную функцию дифракционной решетки при условии равенства ширины прозрачной и непрозрачной части штриха $a = b = \frac{d}{2}$.

Обычно в спектрометре используется такая дифракционная решетка, для которой в интересуемой области спектра наблюдается только один дифракционный максимум, а для максимумов более высокого порядка нет решения для угла дифракции в интересуемой области спектра.

<u>Факультативно. Отражательная решетка с профилированным штрихом.</u>

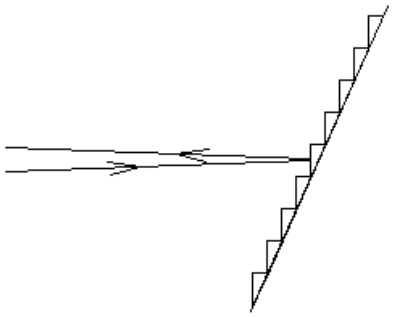
В направлении зеркального отражения от плоскости одного штриха каждый штрих отражает большую амплитуду света. Для узкого штриха решетки свет хорошо отражается не только строго в зеркальном направлении, а в довольно большой угол $\frac{\lambda}{a}$, где a — ширина зеркальной части штриха. Главный дифракционный максимум решетки, который близок к направлению

зеркального отражения одного штриха решетки, будет иметь большую амплитуду, больше чем амплитуда нулевого порядка дифракции.



При нормальном падении света на изображенную решетку большая часть энергии отражается не в нулевой порядок дифракции, а в первый порядок, если в этом направлении зеркально отражает каждый штрих решетки. В спектрометре энергетически выгодно, чтобы в первый порядок дифракции света отражалось больше, чем в нулевой порядок, поэтому в спектрометре обычно используется решетка с профилированным штрихом.

Отражательная решетка с профилированным штрихом может использоваться, как например в CO_2-лазере, в качестве одного из зеркал лазера. Такое зеркало отражает обратно свет в минус первый порядок дифракции



только для одной длины волны $2d \cdot \sin(\alpha) = \lambda$.

Поворот решетки и одновременное изменение угла падения света приводит к изменению длины волны света λ, для которой решетка отражает свет обратно в резонатор лазера. Это используется для селекции продольных мод лазера в случае очень широкой линии усиления среды.

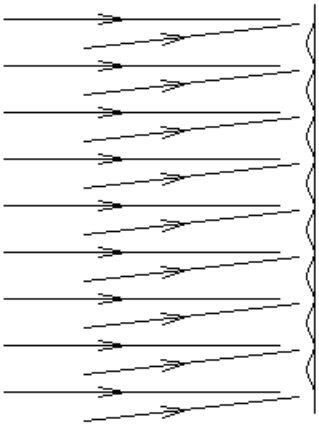
Для CO_2-лазера в минус первый порядок дифракции решетки отражается до 90% энергии.

Дифракционные решетки Рамана — Ната (плоские), дифракционные решетки Брэгга. Обычно их рассматривают при рассмотрении дифракции света на ультразвуковой волне, но в современной оптике — и при дифракции на наноструктурах.

Голография.
Экзамен. Голограмма плоской световой волны.

Рассмотрим некоторый экран, на который падают две плоские монохроматические световые волны. Пусть одна из волн падает на экран строго перпендикулярно экрану. Назовем эту волну опорной волной. Пусть вторая

волна, назовем ее сигнальной волной, падает на экран под небольшим углом к первой. На экране наблюдаются интерференционные полосы.

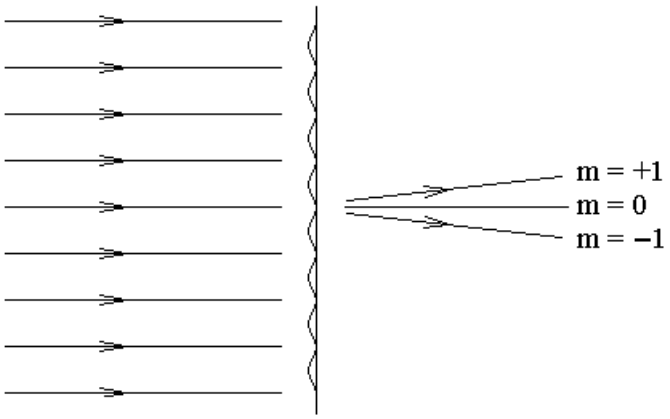


Уберем экран и рассмотрим плоскость вторичных источников в бывшем месте расположения экрана. В темной интерференционной полосе вторичных источников нет, в светлой полосе — есть.

Те же самые вторичные источники в рассматриваемой плоскости можно получить другим способом. Возьмем прозрачную пластинку, нанесем на нее фотоэмульсию и сфотографируем интерференционную картину в рассматриваемой нами плоскости. Это фотографирование назовем записью голограммы. Для записи голограммы важно чтобы обе волны были монохроматическими, поэтому используется лазерное излучение.

Будем считать, что темные интерференционные полосы стали темными непрозрачными полосами на фотопластинке, а светлые интерференционные полосы стали прозрачными полосами на фотопластинке. Эту проявленную фотографию будем называть голограммой.

Что будет, если на голограмму направить только одну из двух световых волн — опорную волну? Интерференционная картина, запечатленная на голограмме, будет выполнять функцию дифракционной решетки, работающей на пропускание. Если почернение голограммы — гармоническая функция координаты, то дифракционная решетка имеет только нулевой и плюс-минус первые порядки дифракции m.



Здесь в первом порядке дифракции (вверх) $m = +1$ — восстановленная сигнальная волна, в нулевом порядке $m = 0$ — прошедшая опорная волна, и еще одна волна в минус первом порядке дифракции — лишняя волна.

Таким образом, если голограмму осветить опорной волной, то в прошедшем свете за голограммой кроме опорной волны появляется восстановленная сигнальная волна.

Освещение голограммы опорной световой волной и наблюдение восстановленной сигнальной волны называется воспроизведением голограммы.

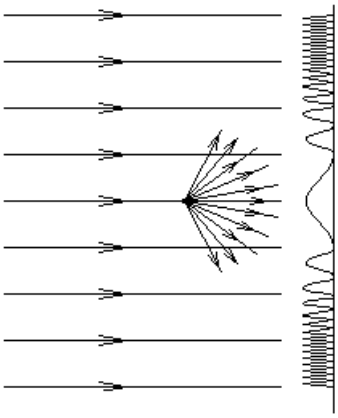
Если не ставить фотопластинку для записи голограммы, то от вторичных источников света в плоскости фотопластинки нет минус первого порядка дифракции. Почему минус первый порядок дифракции есть при воспроизведении голограммы?

Дело в том, что при восстановлении голограммы все вторичные источники света в плоскости фотопластинки имеют одинаковую фазу, а при записи голограммы фазы в плоскости фотопластинки разные. Учет разных фаз при записи голограммы показывает, что излучение каждого штриха решетки в направлении минус первого порядка дифракции имеет нулевую амплитуду.

Экзамен. Голограмма точки при нормальном падении опорной волны.

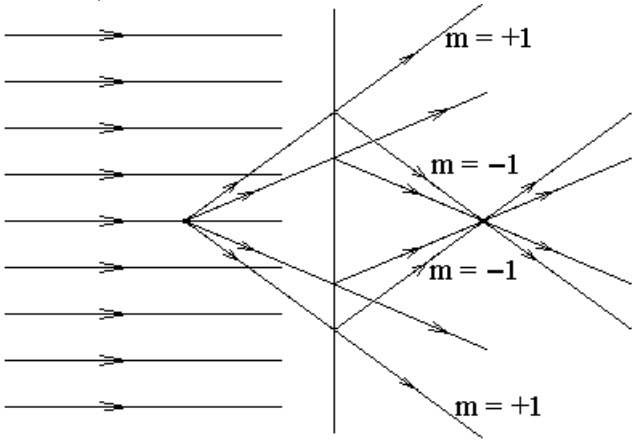
Рассмотрим запись голограммы.

Пусть перпендикулярно на фотопластинку падает опорная монохроматическая световая волна, и пусть на пути световой волны находится маленькая песчинка (пылинка, капля), рассеивающая свет.



Волна, рассеянная песчинкой, — сигнальная волна. Сигнальная волна будет иметь почти сферический фронт. На фотопластинке опорная и сигнальная волны интерферируют. Задача имеет осевую симметрию, следовательно, и интерференционная картина обладает той же симметрией. Интерференционная картина — светлые и темные кольца. В центре интерференционной картины угол α между двумя интерферирующими волнами мал, следовательно, интерференционные полосы — широкие. Ширина полос $d = \frac{\lambda}{\alpha}$. По мере удаления от центра экрана интерференционные кольца становятся все уже и уже, так как угол α между интерферирующими волнами увеличивается. В этом смысле интерференционная картина похожа на кольца Ньютона.

После проявления фотопластинки получим голограмму точки. Для воспроизведения голограммы осветим ее опорной волной. Каждый небольшой участок голограммы можно рассматривать, как голограмму плоской волны, так как на малом участке ширина интерференционных полос почти постоянна. Из каждого малого участка голограммы при ее освещении опорной волной выходят три волны: $m = +1$ — восстановленная сигнальная волна, $m = 0$ — прошедшая опорная волна, $m = -1$ — еще одна световая волна.

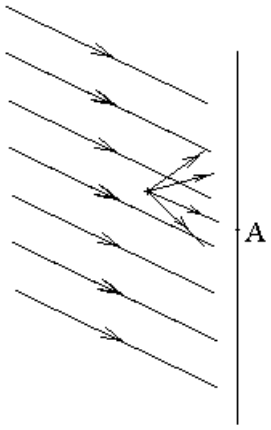


На рисунке, чтобы не загромождать его, изображены только некоторые лучи первого и минус первого порядков дифракции. Лучи плюс первого порядка дифракции как бы выходят из мнимого восстановленного изображения точечного источника сигнальной волны. Лучи минус первого порядка дифракции формируют лишнее действительное изображение справа от голограммы.

Заметим, что голограмма фокусирует свет в точку действительного изображения. Если почернение интерференционных полос голограммы имеет прямоугольный профиль, а не гармонический профиль, как это наиболее желательно для голограммы, то голограмма точки представляет собой зонную пластинку для точки действительного изображения.

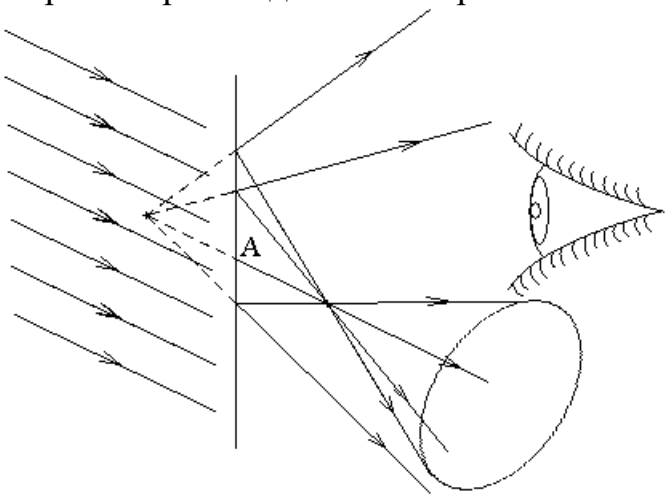
<u>Факультативно. Голограмма точки при наклонном падении опорной волны.</u>

Запись голограммы.



Рассмотрим луч, который рассеян точечным объектом почти в направлении опорной волны. Этот луч проходит фотопластинку в некоторой точке A. Угол α между двумя интерферирующими лучами для этой точки близок к нулю, а интерференционные полосы в точке A наиболее широкие $d = \frac{\lambda}{\alpha}$.

Рассмотрим теперь воспроизведение голограммы.

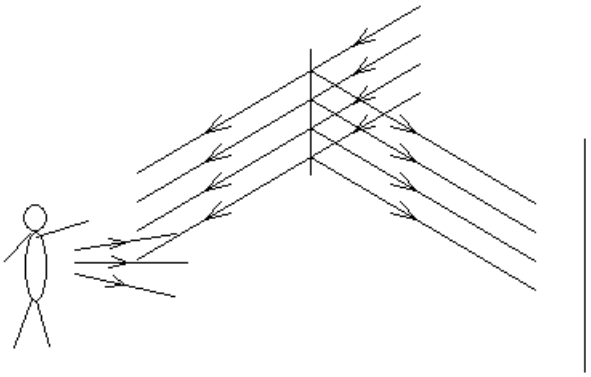


В окрестности точки A голограммы интерференционные полосы самые широкие. Для дифракционной решетки с широкими штрихами d нулевой и плюс-минус первый дифракционные максимумы направлены почти одинаково, так как характерные углы дифракции $\frac{\lambda}{d}$ малы. Минус первые порядки дифракции разных участков голограммы должны пересекаться в точке действительного изображения. Следовательно, действительное изображение находится на продолжении луча, проходящего через точку A голограммы. Расстояние от голограммы до действительного изображения такое же, как от голограммы до восстановленного мнимого изображения точки рассеяния.

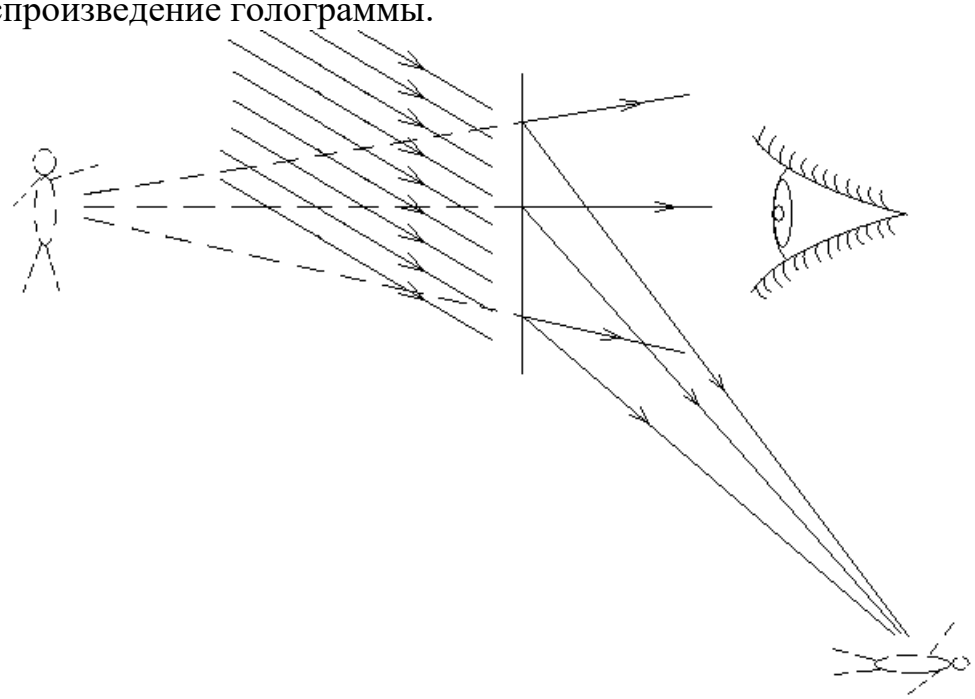
Как видно из рисунка, наклонное падение опорной волны позволяет сделать так, чтобы лучи, проходящие через действительное изображение, не попадали в глаз и не мешали рассматривать восстановленное мнимое изображение.

Факультативно. Плоская голограмма протяженного объекта.

Запись голограммы. Освещение объекта и опорная волна формируются из излучения одного лазера при расщеплении света на полупрозрачной пластине. Свет, рассеянный объектом и свет опорной волны интерферируют на фотопластинке.



Воспроизведение голограммы.



Изображение, полученное при восстановлении голограммы — объемное изображение. При разглядывании голограммы впечатление такое, что вы смотрите на голограмму, как в окно. Если один предмет мнимого изображения несколько загораживает другой предмет, то можно отклонить голову в сторону, чтобы увидеть заслоняемый объект. Для полной иллюзии окна не хватает только, чтобы изображение было цветным. Восстановленное изображение видно в монохроматическом свете опорной волны, которым производилась запись голограммы и которым голограмма воспроизводится.

Экзамен. Голографическая интерферометрия.

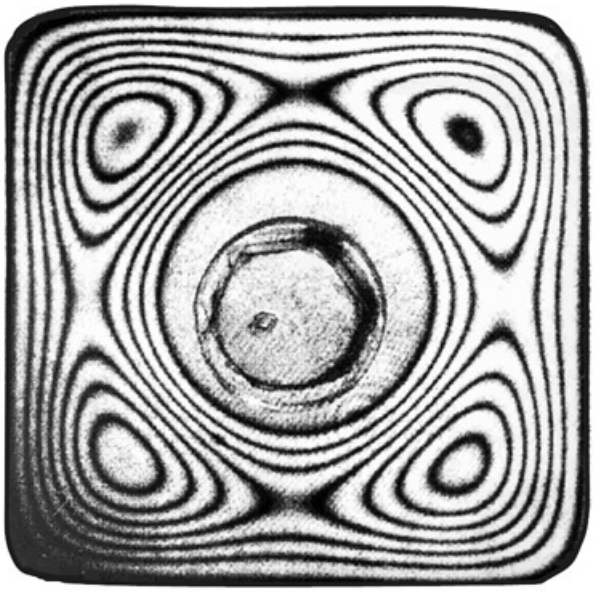
Запишем на плоской фотопластинке голограмму поверхности некоторого предмета в монохроматическом свете.

Восстановим мнимое изображение этой поверхности с помощью голограммы и монохроматической опорной волны.

Одновременно с восстановлением изображения поместим реальную поверхность того же предмета на ее прежнее место туда, где находится ее восстановленное мнимое изображение. Пусть свет опорной волны падает на реальную поверхность предмета так же, как это было при записи голограммы.

В монохроматическом свете будут одновременно видны и реальная поверхность и ее восстановленное мнимое изображение. Если обе поверхности чуть сдвинуть относительно друг друга, то излучение, идущее от них, очень похоже на свет отраженный от плоскопараллельной пластинки. Если между поверхностями будет малый угол, то это будет похоже на отражение света от оптического клина с малым углом. При этом будут наблюдаться интерференционные полосы равной толщины.

Если реальное тело чуть деформировать, то наблюдаемая поверхность покроется полосами равной толщины, отображающими деформацию тела. Разность хода при отражении от почти плоскопараллельной пластинки $\Delta = 2nh \cdot \cos(\alpha)$, h — толщина пластинки, $n = 1$ (воздушный зазор), α — угол преломления света (в данном случае равный углу падения). При изменении разности хода на λ ширина зазора меняется на $\frac{\lambda}{2\cos(\alpha)}$. При этом происходит визуализация малых деформаций величиной порядка микрона.

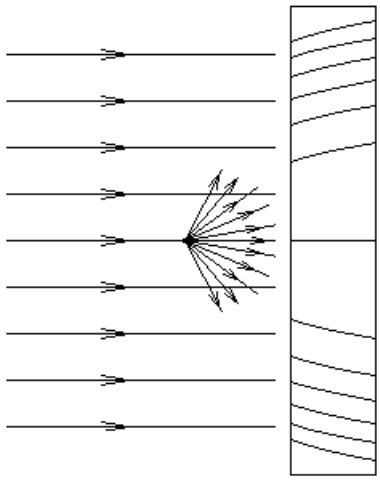


Это один из методов голографической интерферометрии.

<u>Факультативно. Толстослойная голограмма.</u>

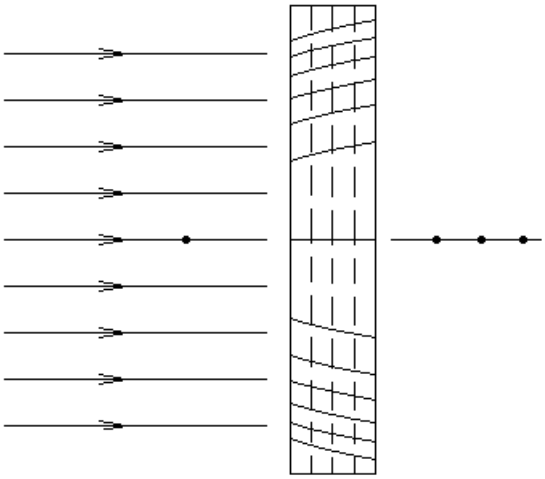
Рассмотрим голограмму одной точки с нормально падающей опорной волной. Пусть голограмма записывается в свете с длиной волны λ.

Запись голограммы.



Здесь справа толстослойная фотопластинка, и в ней изображены темные интерференционные полосы в сечении плоскостью рисунка. Задача обладает осевой симметрией, и темные полосы в объеме фотопластинки представляют собой параболоиды вращения с осью, совпадающей с осью симметрии задачи. Фокусы параболоидов совпадают с рассеивающей свет точкой.

Воспроизведение голограммы.



Здесь точка слева от голограммы — восстановленное мнимое изображение точечного источника рассеянного света. Рассмотрим три пунктирные плоскости внутри голограммы, как три плоские голограммы. Для каждой из этих трех голограмм восстановленное мнимое изображение находится в одной и той же точке слева от голограммы. Действительные же изображения находятся симметрично мнимому изображению относительно соответствующей плоской голограммы, и для каждой плоской голограммы действительное изображение находится в своей точке. Это три точки справа от толстослойной голограммы.

Действительные изображения разных слоев голограммы находятся в разных точках, то есть действительное изображение смазано, и поэтому его не видно. Мнимые изображения находятся в одной точке и поэтому отчетливо видны.

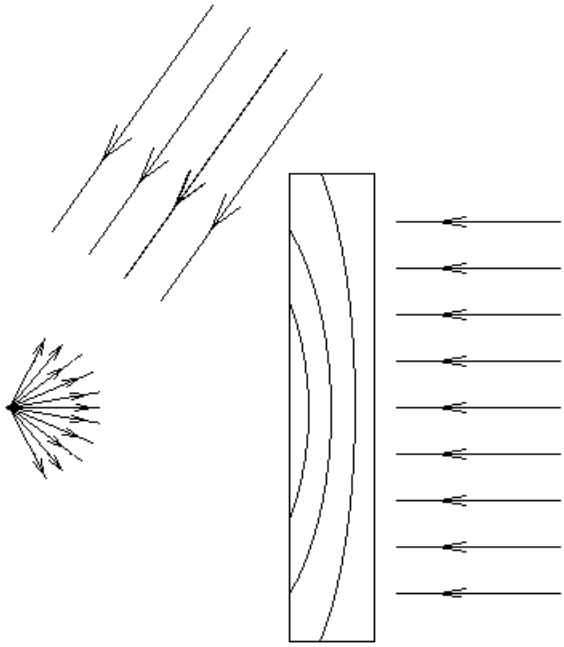
Плоская голограмма точки подобна зонной пластинке. Радиус m-ой зоны Френеля $r_m = \sqrt{m\lambda L}$. Если при восстановлении голограммы используется свет другой длины волны, то радиусы зон Френеля измениться не могут, так как голограмма уже проявлена и зафиксирована. Следовательно, изменится величина $L \sim \frac{1}{\lambda}$, и изображение, восстановленное в свете другой длины волны, окажется на другом расстоянии от голограммы. При этом для разных слоев толстослойной голограммы положения восстановленного изображения окажутся разными, не только для действительных изображений, но и для мнимых изображений. То есть изображения смажутся и не будут видны.

Если же восстанавливать голограмму, освещая ее белым светом, то толстослойная голограмма сама выберет длину волны, при которой ее записывали, и в этой длине волны сформирует мнимое изображение. Если при восстановлении голограммы ее освещать белым светом из другого направления, не совпадающим с направлением света при записи голограммы, то восстановленное изображение будет искажено по форме и частично по цвету. При освещении голограммы рассеянным светом со всех направлений изображение полностью смазывается и пропадает.

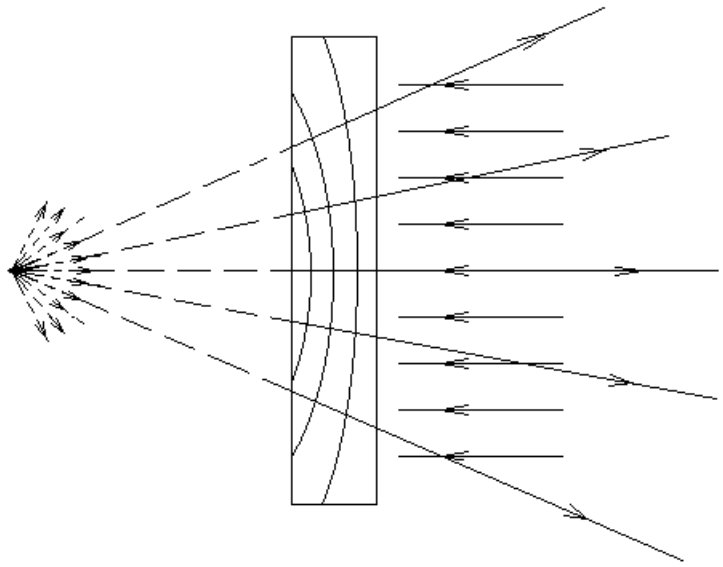
Экзамен. Метод Денисюка.

Метод Денисюка — это метод записи толстослойной голограммы во встречных световых пучках. Это наиболее современный метод записи голограмм.

Запись голограммы точки:



Воспроизведение голограммы точки:



Голограмма работает, как многослойное зеркало. Отраженные волны от каждого слоя складываются синфазно в направлении восстановленной волны.

Преимущество записи во встречных пучках состоит в том, что воспроизведение голограммы происходит в отраженном свете, а не на просвет. Толстослойную голограмму и в этом случае можно восстанавливать в белом свете.

Для получения цветной голограммы запись производится в излучении лазеров трех цветов. В белом свете запись голограммы невозможна, потому что в белом свете не будет интерференционных полос. Воспроизведение голограммы, записанной в излучении трех лазеров, производится в сильном белом свете. Голограмма сама выбирает из белого света излучение трех длин волн, в которых производилась запись.

Можно рассчитать интерференционную картину голограммы на компьютере, например, в трех длинах волн, а затем черным цветом монохромным принтером напечатать цветную голограмму. При этом нужен принтер с высоким разрешением печати, желательный размер пикселя заметно меньше длины волны света.

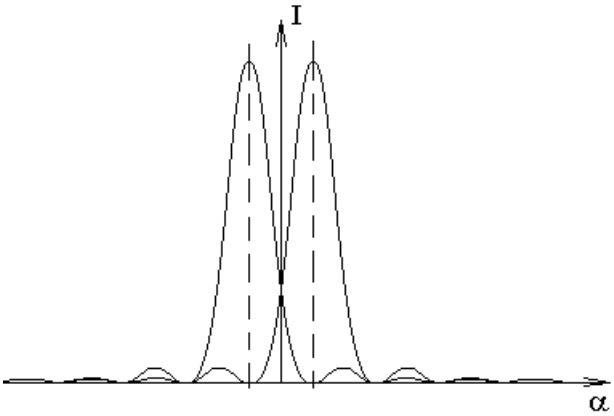
Дифракционный предел разрешения.
Экзамен. Дифракционный предел разрешения телескопа и глаза.

Будем считать, что телескоп — это одна линза (объектив) и экран в фокальной плоскости линзы. Будем считать, что прямо перед линзой объектива находится круглое отверстие в непрозрачном экране и диаметр отверстия равен диаметру линзы.

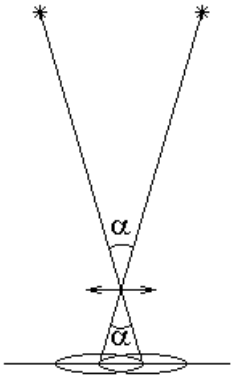
Свет далекой звезды приходит в виде почти плоской волны. В таком случае, в фокальной плоскости объектива наблюдается дифракция Фраунгофера на круглом отверстии: $I(\alpha) = I_0 \left(\frac{2J_1(U)}{U} \right)^2$, где $U = \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha)$,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, D — диаметр отверстия. Угловой радиус первого темного кольца дифракционного изображения $\alpha = 1.22\frac{\lambda}{D}$.

Рассмотрим теперь две близкие звезды. По критерию Рэлея звезды почти разрешены, если максимум интенсивности дифракционного изображения одной звезды совпадает с первым нулем интенсивности изображения другой звезды.



Рассмотрим луч, выходящий из центра звезды и проходящий через центр объектива. Этот луч приходит в центр диска Эйри дифракционного изображения звезды на экране. Рассмотрим такой луч для каждой из двух звезд.



Из рисунка видно, что угол между направлениями на две звезды равен углу из центра объектива в центры двух изображений звезд. А на пределе разрешения по критерию Рэлея он же будет равен угловому радиусу первого темного кольца дифракционного изображения одной звезды.

В результате угловое разрешение телескопа или угол между направлениями на две звезды, при котором они едва разрешимы, равен угловому радиусу первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии:

$\alpha = 1.22\frac{\lambda}{D}$, где D — диаметр объектива телескопа.

Чтобы увеличить угловое разрешение телескопа (уменьшить α), нужно увеличивать диаметр линзы объектива телескопа D (для зеркального телескопа — диаметр зеркала объектива телескопа). Если диаметр объектива телескопа

больше одного метра, то смещение изображения звезды из-за шумов атмосферы становятся сравнимы с дифракционным размером изображения звезды. В таком случае дальнейшее увеличение диаметра телескопа становится малоэффективным.

Света от далекой звезды мало, поэтому никто не пытается рассматривать изображение звезды в телескопе в монохроматическом свете. В белом свете угловое разрешение усредняется по длинам волн и будет примерно таким же.

Аналогично телескопу угловое разрешение глаза равно

$$\alpha = 1.22\frac{\lambda}{D},$$

где D — диаметр зрачка глаза.

Угловое разрешение здорового глаза близко к дифракционному пределу разрешения.

Факультативная вставка.

Рассмотрим еще одно объяснение того, что изображение удаленного точечного источника не является точечным, а имеет некоторый дифракционный размер.

Поверхность равных фаз перед линзой плоская, а за линзой — сферическая. Центр сферы находится в фокусе линзы. Рассмотрим излучение вторичных источников этой сферической поверхности равных фаз.

В фокусе линзы излучение вторичных источников синфазно, поэтому там большая амплитуда света.

При небольшом смещении точки наблюдения от фокуса на расстояние гораздо меньшее длины волны свет вторичных источников приходит в точку наблюдения почти синфазно, и амплитуда света в точке наблюдения тоже будет большой. Поэтому изображение неточечное.

Аналогично из рассмотрения интеграла Кирхгофа можно показать, что свет нельзя собрать на площадку размером меньше $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Понятие о разрешающей способности микроскопа.

Микроскоп — это одна линза (объектив) и экран.

Чтобы получить увеличенное действительное изображение предмета нужно поместить предмет близко к фокальной плоскости линзы, чуть дальше от линзы. Действительное изображение при этом получается на большом расстоянии от линзы, большом по сравнению с фокусным расстоянием линзы.

Рассмотрим изображение точечного предмета. Если изображение точечного источника получается очень далеко, то свет сразу за линзой имеет почти плоский фронт волны. В таком случае свет сразу за линзой такой же, как без линзы при наблюдении дифракции Фраунгофера на круглом отверстии.

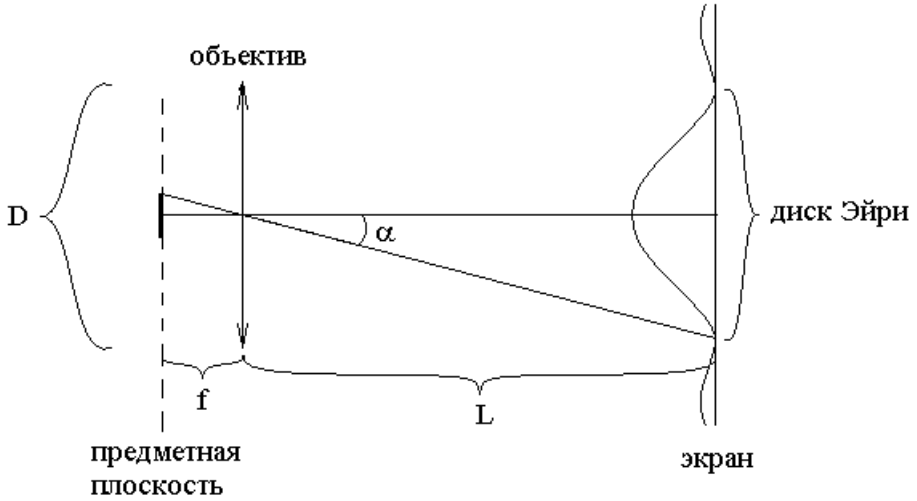
Для дифракции Фраунгофера на круглом отверстии угловой радиус первого темного кольца равен:

$\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$, где D — диаметр отверстия (в нашем случае диаметр линзы объектива микроскопа).

Точечный предмет (источник) дает изображение на экране в виде диска с радиусом первого темного кольца $r = L\alpha = L \cdot 1.22\dfrac{\lambda}{D}$, где L — расстояние от линзы до экрана.

Этот диск изображения (диск Эйри) можно отобразить обратно в предметную плоскость по законам геометрической оптики.

Рассмотрим другую точку в этом кружке обратного изображения. В плоскости увеличенного изображения эта точка дает прямое изображение (еще одного диска Эйри), которое перекрывается с прямым изображением исходной точки, и два изображения неразличимы по критерию Рэлея.



Следовательно, разрешающая способность микроскопа $l_{\min}$ равна радиусу кружка обратного изображения точки в предметной плоскости.

$l_{\min} = f\alpha$, где f — фокусное расстояние объектива микроскопа, так как расстояние от предметной плоскости до объектива близко фокусному расстоянию объектива.

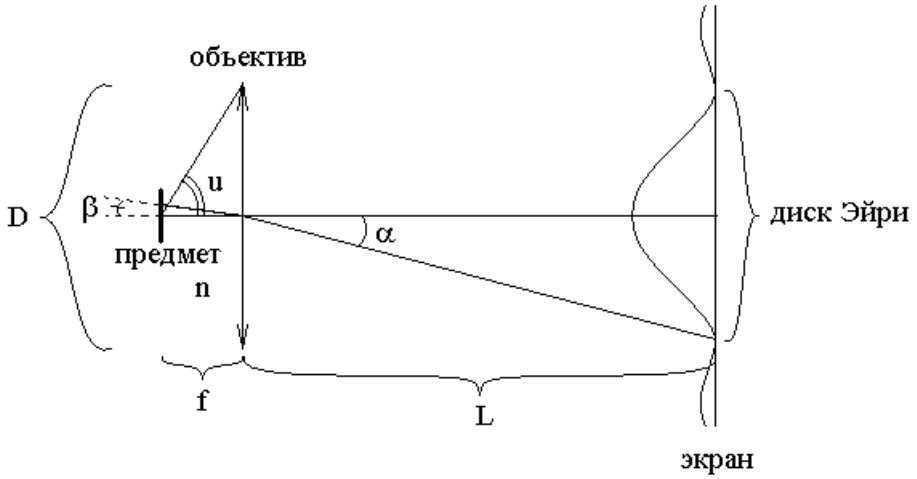
Подставим сюда угловое разрешение объектива $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ и получим

$l_{\min} = 1.22\dfrac{\lambda f}{D}$ — разрешающая способность микроскопа или наименьшее расстояние между двумя точечными объектами, при котором они еще видны, как два объекта, а не сливаются в одно изображение. Здесь D — диаметр объектива, f — фокусное расстояние объектива.

Сделаем некоторое уточнение.

Часто для увеличения разрешающей способности микроскопа и соответственно для уменьшения величины $l_{\min}$ большую часть пространства

между объективом и линзой объектива заполняют прозрачной средой с максимально возможным показателем преломления n.



Здесь f — фокусное расстояние объектива с учетом заполнения пространства между предметом и объективом средой с показателем преломления n, D — диаметр объектива, $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ — угловой радиус диска Эйри дифракционной картины образованной точечным источником света в плоскости изображения.

$$n \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha)$$

Здесь β — угловой размер обратного изображения по законам геометрической оптики диска Эйри в предметную плоскость.

В таком случае дифракционный предел разрешения:

$$l_{\min} = \beta f,$$

где

$$\beta \approx \sin(\beta) = \frac{1}{n}\sin(\alpha) \approx \frac{\alpha}{n} = 1.22\frac{\lambda}{nD} = 0.61\frac{\lambda}{n\dfrac{D}{2}} = 0.61\frac{\lambda}{nf \cdot tg(u)} \quad =>$$

$$l_{\min} = \beta f = 0.61\frac{\lambda}{n \cdot tg(u)}.$$

Здесь $2u$ — апертура микроскопа или угол, под которым из предмета виден входной зрачок (линза объектива).

Для реального микроскопа $2u$ не является малым углом. В таком случае в первой же формуле $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ (это угловой радиус первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии) была допущена некоторая неточность. Формула $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ справедлива, если во всех точках отверстия амплитуда светового поля одинаковая. В нашем же случае амплитуда поля на краю отверстия меньше, чем в центре отверстия, так как край отверстия

находится дальше от рассматриваемого предмета в $\frac{1}{\cos(u)}$ раз. В каком-то смысле можно считать, что свет дифрагирует не на всем отверстии радиусом $\frac{D}{2}$, а только на его части примерно радиусом $\frac{D}{2}\cos(u)$. Тогда вместо полученного ранее выражения $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n\frac{D}{2}}$ получаем $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n\frac{D}{2}\cos(u)}$.

Соответственно, вместо $l_{\min} \approx 0.61\frac{\lambda}{n \cdot tg(u)}$ получаем

$$l_{\min} \approx 0.61\frac{\lambda}{n \cdot tg(u) \cdot \cos(u)} \approx 0.61\frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)}.$$

Более строгая теория разрешающей способности микроскопа (теория Аббе) дает для разрешающей способности микроскопа именно такой результат:

$$l_{\min} = 0.61\frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)},$$

где величина $n \cdot \sin(u)$ называется числовой апертурой микроскопа.