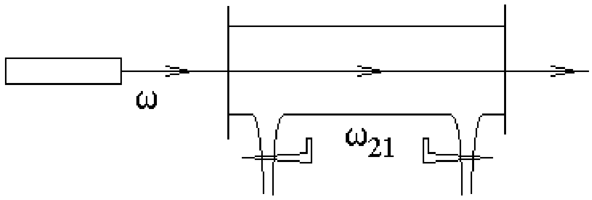
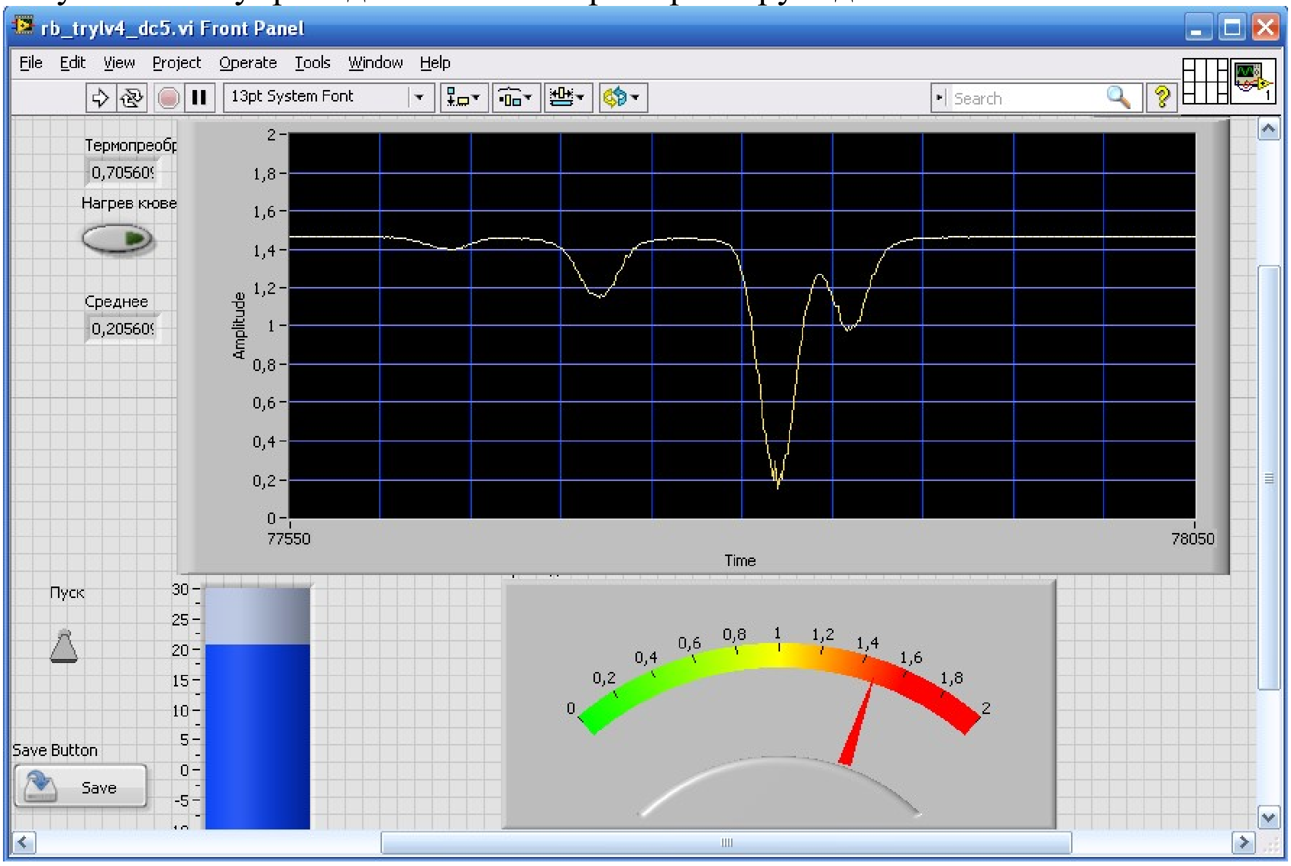
Светоиндуцированный дрейф. Разделение изотопов.

Рассмотрим следующую оптическую схему. Пусть монохроматическое излучение лазера с частотой ω проходит через кювету с газовой смесью двух изотопов.



Линии поглощения изотопов несколько сдвинуты по частоте друг относительно друга. Так на следующем рисунке приведена изотопическая тонкая структура D_2 линии рубидия 780 нм. Две средние компоненты принадлежат изотопу Rb^{85}, две крайние — изотопу Rb^{87}. Линии уширены эффектом Доплера. Лабораторная работа по наблюдению поглощения излучения полупроводникового лазера парами рубидия.



Пусть частота излучения лазера лежит в пределах доплеровского контура линии поглощения одного из двух изотопов с центром на частоте ω_{21}.

Пусть для определенности частота лазера выше частоты поглощающего перехода $\omega > \omega_{21}$. Тогда $V_z = \dfrac{\omega - \omega_{21}}{k} > 0$. Это означает, что излучение лазера поглощают атомы, летящие в направлении луча. Поглощая свет и переходя в возбужденное состояние, атомы разбухают, так как в возбужденном состоянии атом имеет бо̀льшие размеры, чем в невозмущенном состоянии. Большие атомы чаще сталкиваются, так как имеют бо̀льшую площадь поперечного сечения.

Рассмотрим два набора атомов одного и того же изотопа, но с противоположными значениями лучевой скорости. Пусть один из двух наборов атомов с лучевой скоростью $V_z > 0$ взаимодействует со светом. Атомы из этого набора летят вдоль лазерного луча, чаще сталкиваются и поэтому сильнее тормозятся. Следовательно, центр масс двух наборов атомов начинает смещаться навстречу лазерному лучу.

В результате поглощающий свет изотоп скапливается около окна кюветы, расположенного ближе к лазеру. Второй изотоп выдавливается из этой области в ту часть кюветы, которая расположена дальше от лазера. Если два изотопа атомов входят в состав молекул, то спектральные линии молекул разных изотопов сдвинуты еще сильнее, чем для атомов, так как разный вес атомов сдвигает частоту колебаний молекул.

Через один из кранов, расположенных в концах кюветы, можно выпустить обогащенный одним из двух изотопов газ в предварительно откачанный до вакуума сосуд.

Поляризация среды.

Поляризация — это электрический дипольный момент единицы объема.

При взаимодействии среды со световым полем в молекулах среды возникает дипольный момент, осциллирующий на частоте световой волны. Именно этот дипольный момент и связанная с ним поляризация среды на частоте световой волны нас и будут интересовать

$\vec{P} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dV}$, где $\vec{P}$ — поляризация среды, $\vec{p} \equiv \sum\limits_i q_i \vec{r}_i$ — дипольный момент системы зарядов $\{q_i\}$, расположенных в точках с радиус-векторами $\{\vec{r}_i\}$.

$\vec{P} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{V_z} dV_z$, где $\vec{P}_{V_z}$ — распределение поляризации по лучевой скорости молекул, $\vec{P}_{V_z} dV_z$ — поляризация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$.

$\vec{P} = N_0 \cdot \langle \vec{p} \rangle$, где N_0 — концентрация молекул, $\langle \vec{p} \rangle$ — среднее значение дипольного момента одной молекулы.

Рассмотрим поляризацию молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$:

$\vec{P}_{V_z} dV_z = N_{0_{V_z}} dV_z \cdot \langle \vec{p}(V_z) \rangle$, где $N_{0_{V_z}} dV_z$ — концентрация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$, $\langle \vec{p}(V_z) \rangle$ — средний дипольный момент этих молекул, который может зависеть от лучевой скорости V_z.

Для любой физической величины $\left\langle F\right\rangle = Sp\left(\hat{\rho}\hat{F}\right) = \sum\limits_{n,k}\rho_{kn}F_{nk}$. Тогда

$$\left\langle p\right\rangle = Sp\left(\hat{\rho}\hat{p}\right) = \sum_{n,k}\rho_{kn}p_{nk} = \rho_{12}p_{21} + \rho_{21}p_{12} = p\left(\rho_{12}+\rho_{21}\right) = 2p\,\mathrm{Re}\left(\rho_{21}\right),$$

где $\left\langle p\right\rangle$ — среднее значение проекции дипольного момента молекулы на единичный вектор поляризации световой волны, p в правой части равенства — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны (дипольный момент перехода).

При взаимодействии двухуровневой среды с монохроматическим световым полем в приближении вращающейся волны недиагональный элемент матрицы плотности имеет вид:

$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21}e^{-i\varphi}$, где $\varphi \equiv \omega t - kz - \varphi_0$ — фаза световой волны, $\tilde{\rho}_{21} = i\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{\rho_{11}-\rho_{22}}{\Gamma - i\Omega}$.

Тогда

$$\left\langle p\right\rangle = p\left(\rho_{12}+\rho_{21}\right) = p\left(\overset{*}{\rho}_{21}+\rho_{21}\right) = 2p\,\mathrm{Re}\left(i\frac{R}{2}\cdot\frac{\rho_{11}-\rho_{22}}{\Gamma-i\Omega}e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= pR\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)\frac{\Gamma\cdot\sin\left(\varphi\right)-\Omega\cdot\cos\left(\varphi\right)}{\Gamma^2+\Omega^2}.$$

Тогда

$$P_{V_z} = N_{0_{V_z}}\left\langle p\right\rangle = N_{0_{V_z}}pR\left(\rho_{11}\left(V_z\right)-\rho_{22}\left(V_z\right)\right)\frac{\Gamma\cdot\sin\left(\varphi\right)-\Omega\cdot\cos\left(\varphi\right)}{\Gamma^2+\Omega^2},$$

где $$\begin{cases} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \\ \varphi = -\varphi_0 + \omega t - kz \\ N_{0_{V_z}} = \dfrac{N_0}{\sqrt{\pi}U}e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ p = \int\psi_1^*\left(\vec{p},\vec{e}\right)\psi_2 dV \\ \vec{p} = \sum\limits_i q_i\vec{r}_i \\ \vec{\mathcal{E}}\left(t\right) = \mathcal{E}_0\vec{e}\cdot\cos\left(\varphi\right) \end{cases}.$$

Получается, что поляризация среды пропорциональна амплитуде светового поля $P \sim \mathcal{E}_0$, но сдвинута по фазе относительно осцилляций светового поля.

Для описания такой поляризации вводят в рассмотрение комплексную восприимчивость среды.

Сначала введем комплексную напряженность $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ световой волны, соответствующую вещественной напряженности $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\cos(\varphi)$:

$\tilde{\mathcal{E}}(t)=\mathcal{E}_0\cdot e^{-i\varphi}$.

Тогда $E(t)=\mathrm{Re}\left(\tilde{\mathcal{E}}(t)\right)=\dfrac{\tilde{\mathcal{E}}(t)}{2}+к.с.$

$\tilde{P}=\varepsilon_0\tilde{\chi}\tilde{\mathcal{E}}(t)$ — определение комплексной восприимчивости $\tilde{\chi}$, как коэффициента пропорциональности между комплексной поляризацией $\tilde{P}$ и комплексной напряженностью $\tilde{\mathcal{E}}(t)$.

В системе СГС Гаусса: $\tilde{P}=\tilde{\chi}\tilde{\mathcal{E}}(t)$.

Выразим комплексное число $\tilde{\chi}$ через два вещественных числа χ' и χ'':

$\tilde{\chi}=\chi'+i\chi''$.

Выразим вещественную поляризацию среды, осциллирующую с частотой световой волны, через вещественную и мнимую части комплексной восприимчивости среды.

$$P=\mathrm{Re}\left(\tilde{P}\right)=\frac{\tilde{P}}{2}+к.с.=\frac{\varepsilon_0\tilde{\chi}\tilde{\mathcal{E}}(t)}{2}+к.с.=\frac{\varepsilon_0}{2}(\chi'+i\chi'')\mathcal{E}_0e^{-i\varphi}+к.с.=$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}(\chi'+i\chi'')\mathcal{E}_0\left(\cos(\varphi)-i\cdot\sin(\varphi)\right)+к.с.=\varepsilon_0\mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi)+\chi''\sin(\varphi)\right).$$

$$P=\varepsilon_0\mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi)+\chi''\sin(\varphi)\right).$$

В системе СГС Гаусса: $P=\mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi)+\chi''\sin(\varphi)\right)$.

Соответствующее равенство для распределений по лучевой скорости:

$$P_{V_z}=\varepsilon_0\mathcal{E}_0\left(\chi'_{V_z}\cos(\varphi)+\chi''_{V_z}\sin(\varphi)\right).$$

Сравним это выражение с полученным ранее выражением

$$P_{V_z}=N_{0_{V_z}}pR\left(\rho_{11}(V_z)-\rho_{22}(V_z)\right)\frac{\Gamma\cdot\sin(\varphi)-\Omega\cdot\cos(\varphi)}{\Gamma^2+\Omega^2}.$$

В системе СГС Гаусса: $P_{V_z}=N_{0_{V_z}}pR\left(\rho_{11}(V_z)-\rho_{22}(V_z)\right)\dfrac{\Gamma\cdot\sin(\varphi)-\Omega\cdot\cos(\varphi)}{\Gamma^2+\Omega^2}$.

Оба равенства справедливы для любого момента времени и, следовательно, для любой фазы φ. В таком случае можно приравнять коэффициенты при косинусе φ и при синусе φ этих двух выражений для P_{V_z}.

Тогда с учетом $R=\dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ получим

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = \dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}.$$

В системе СГС Гаусса $\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = \dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}$.

Здесь

$$\begin{cases} \rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \left(1 - \dfrac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \\ G = \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right) \\ R = \dfrac{p\mathscr{E}_0}{\hbar} \\ \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \end{cases}.$$

Следующее равенство

$$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi)$$

является определением синфазной P_c и квадратурной P_s амплитуд поляризации среды. Тогда с учетом равенства $P = \varepsilon_0 \mathscr{E}_0 \left(\chi' \cos(\varphi) + \chi'' \sin(\varphi)\right)$ следует

$$\begin{cases} P_c = \varepsilon_0 \chi' \mathscr{E}_0 \\ P_s = \varepsilon_0 \chi'' \mathscr{E}_0 \end{cases}.$$

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} P_c = \chi' \mathscr{E}_0 \\ P_s = \chi'' \mathscr{E}_0 \end{cases}$.

Обратное воздействие среды на волну. Дифференциальные уравнения для амплитуды поля или укороченные волновые уравнения.

Излучение диполей среды изменяет проходящую мимо световую волну. Это изменение проявляется в поглощении света и изменении скорости распространения света в среде. Изменения в проходящей световой волне возникают в результате интерференции света переизлученного диполями молекул и проходящей мимо световой волны. В этом и состоит обратное воздействие среды на волну.

Вместо сложения волн излучения диполей, изменение световой волны в среде можно вывести из системы уравнений Максвелла. Что мы и сделаем.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=\rho \\ rot\left(\vec{\mathcal{E}}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ rot\left(\vec{\mathcal{E}}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

без свободных зарядов $\rho=0$ и без токов проводимости $\vec{j}=0$.

Тогда получим:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=0 \\ rot\left(\vec{\mathcal{E}}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

Рассмотрим два выражения для ротора ротора $\vec{\mathcal{E}}$.

С одной стороны, возьмем ротор от второго уравнения и подставим в правую часть вместо ротора $\vec{B}$ выражение для ротора $\vec{H}$ из четвертого уравнения. Напомним, что в оптике $\mu=1$ и $\vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}$. Тогда получим

$$rot\left(rot\left(\vec{\mathcal{E}}\right)\right)=-\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{B}\right)=-\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{H}\right)=-\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}.$$

А с другой стороны по правилу "бац минус цап":

$$rot\left(rot\left(\vec{\mathcal{E}}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{\mathcal{E}}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{\mathcal{E}}\right)-\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right).$$

Здесь $\left(\vec{\nabla},\vec{\mathcal{E}}\right)=div\left(\vec{\mathcal{E}}\right)=\dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}div\left(\vec{D}\right)=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}=0$, тогда

$$rot\left(rot\left(\vec{\mathcal{E}}\right)\right)=-\vec{\mathcal{E}}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)=-\Delta\vec{\mathcal{E}}.$$

Объединяя оба выражения для $rot\left(rot\left(\vec{\mathcal{E}}\right)\right)$, получим:

$$\Delta\vec{\mathcal{E}}-\mu_0\mu\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}=0 \qquad (4.1)$$

В системе СГС Гаусса: $\Delta\vec{\mathcal{E}}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}=0$.

Если подставить $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{\mathcal{E}}$ в уравнение (4.1), то получим волновое уравнение для поля $\vec{E}$:

$$\Delta\vec{\mathcal{E}}-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}=0$$, а с учетом $\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}$

$$\Delta\vec{\mathcal{E}}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}=0 \qquad (4.2)$$

В системе СГС Гаусса — тоже самое.

Сравнивая уравнение (4.2) с определением волнового уравнения в математике:

$$\Delta\vec{\mathcal{E}}-\frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}=0,$$

получим величину фазовой скорости световых волн $V=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Сравнивая величину скорости с определением показателя преломления $V=\frac{c}{n}$, получаем

$n=\sqrt{\varepsilon}$, точнее $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$, но в оптике $\mu\approx 1$.

Тогда $\varepsilon=n^2$ => $\vec{D}=\varepsilon_0 n^2\vec{\mathcal{E}}$

В системе СГС Гаусса: $\vec{D}=n^2\vec{\mathcal{E}}$.

Векторы $\vec{D}$ и $\vec{\mathcal{E}}$ можно связать друг с другом и несколько иначе:

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}+\vec{P}$, где $\vec{P}$ — поляризация среды или объемная плотность дипольного момента, осциллирующая на световой частоте.

В системе СГС Гаусса: $\vec{D}=\vec{\mathcal{E}}+4\pi\vec{P}$.

Разобьем поляризацию на два слагаемых $\vec{P}=\vec{P}_{нерез}+\vec{P}_{рез}$:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}+\vec{P}_{нерез}+\vec{P}_{рез}.$$

В системе СГС Гаусса: $\vec{D}=\vec{\mathcal{E}}+4\pi\vec{P}_{нерез}+4\pi\vec{P}_{рез}$.

Здесь $\vec{P}_{рез}$ — резонансный вклад в поляризацию или вклад двух уровней энергии, связанных переходом близким по частоте к частоте света; $\vec{P}_{нерез}$ — нерезонансный вклад в поляризацию среды от остальных переходов.

По аналогии с формулой $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}+\vec{P}=\varepsilon_0 n^2\vec{\mathcal{E}}$ запишем $\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}+\vec{P}_{нерез}=\varepsilon_0 n_0^2\vec{\mathcal{E}}$, где n_0 — показатель преломления среды вдали от рассматриваемой линии поглощения. Тогда

$$\vec{D}=\varepsilon_0 n_0^2\vec{\mathcal{E}}+\vec{P}_{рез}.$$

В системе СГС Гаусса: $\vec{D}=n_0^2\vec{\mathcal{E}}+4\pi\vec{P}_{рез}$.

Чтобы не тянуть за собой во всех формулах нижний индекс у поляризации будем во всех последующих формулах вместо $\vec{P}_{рез}$ писать просто $\vec{P}$, подразумевая под $\vec{P}$ вклад в поляризацию только от рассматриваемого перехода среды.

Подставим $\vec{D} = \varepsilon_0 n_0^2 \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}_{рез}$ в уравнение (4.1), заменим $\vec{P}_{рез}$ на $\vec{P}$ и получим $\Delta\vec{\mathcal{E}} - \varepsilon_0\mu_0 n_0^2 \mu \dfrac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\mu \dfrac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$, а с учетом $\mu \approx 1$ получим

$$\Delta\vec{\mathcal{E}} - \varepsilon_0\mu_0 n_0^2 \frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$, и с учетом $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$

$$\Delta\vec{\mathcal{E}} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \qquad (4.3)$$

В системе СГС Гаусса: $\Delta\vec{\mathcal{E}} - \dfrac{n_0^2}{c^2} \cdot \dfrac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \dfrac{4\pi}{c^2} \cdot \dfrac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$.

Это — уравнение Даламбера или волновое уравнение с источниками поля.

Далее из этого уравнения мы хотим получить дифференциальное уравнение для амплитуды светового поля через амплитуду поляризации. Эти уравнения для амплитуд и называются укороченными волновыми уравнениями.

Будем рассматривать уравнение (4.3) для комплексных $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{P}$. Для линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся вдоль оси z, и линейно поляризованную вдоль оси y. Тогда $\vec{P} \parallel \vec{\mathcal{E}} \parallel \vec{e}_y$. Для краткости записи отбросим векторные обозначения, и будем рассматривать только проекции векторов на ось y.

Чтобы отличать комплексные величины от вещественных величин будем писать волну над комплексными величинами.

$\mathcal{E} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\mathcal{E}}\right)$ и $P = \mathrm{Re}\left(\tilde{P}\right)$.

Перепишем уравнение (4.3) для комплексных величин:

$$\Delta\tilde{\mathcal{E}} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\tilde{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial t^2} \qquad (4.4)$$

Будем искать решение в виде

$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_0\left(t, z\right) \cdot e^{-i\varphi}$, где ось z направлена вдоль направления распространения световой волны $\varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0$ — фаза световой волны и будем рассматривать фазу, как фазу волны распространяющейся с фазовой скоростью $\frac{c}{n_0}$, а не со скоростью $\frac{c}{n}$, как на самом деле. Соответственно $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_0\nu} = \frac{\omega}{\frac{c}{n_0}} = \frac{n_0\omega}{c}$ — нерезонансное волновое число вместо $k = \frac{n\omega}{c}$.

Несоответствие k_0 настоящему k спрятано в зависимости амплитуды света $\tilde{E}_0$ от z координаты.

Аналогично будем считать

$\tilde{P} = \tilde{P}_0(t,z)\cdot e^{-i\varphi}$, где $\varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0$.

Получим теперь из уравнения (4.4) связь комплексных амплитуд $\tilde{\mathcal{E}}_0$ и $\tilde{P}_0$.

В уравнение надо подставить вторые производные, для которых введем более компактные обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\tilde{\mathcal{E}}}{\partial z^2} \equiv \tilde{\mathcal{E}}'' \\ \dfrac{\partial^2\tilde{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{\mathcal{E}}} \\ \dfrac{\partial^2\tilde{P}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{P}} \end{cases}$$

Выразим эти производные через амплитуды поля и поляризации и подставим в уравнение (4.4).

Дифференцируя по z выражение $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_0(t,z)\cdot e^{-i\varphi}$, получим $\tilde{\mathcal{E}}' = \tilde{\mathcal{E}}_0' e^{-i\varphi} + ik_0\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\varphi}$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{E}}'' = \tilde{\mathcal{E}}_0'' e^{-i\varphi} + 2ik_0\tilde{\mathcal{E}}_0' e^{-i\varphi} - k_0^2\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\varphi}.$$

Аналогично:

$$\ddot{\tilde{\mathcal{E}}} = \ddot{\tilde{\mathcal{E}}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega\dot{\tilde{\mathcal{E}}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\varphi}$$

и

$$\ddot{\tilde{P}} = \ddot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega\dot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2\tilde{P}_0 e^{-i\varphi}.$$

Подставим все три выражения в уравнение (4.4), в котором $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, так как световая волна распространяется вдоль оси z, поэтому нет зависимости от координат x и y и вторые производные по ним равны нулю. После подстановки производных в уравнение (4.4) сократим это уравнение на $e^{-i\varphi}$ и получим:

$$\tilde{\mathcal{E}}_0'' + 2ik_0\tilde{\mathcal{E}}_0' - k_0^2\tilde{\mathcal{E}}_0 - \frac{n_0^2}{c^2}\ddot{\tilde{\mathcal{E}}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2}2i\omega\dot{\tilde{\mathcal{E}}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2}\omega^2\tilde{\mathcal{E}}_0 = \mu_0\ddot{\tilde{P}}_0 - 2i\mu_0\omega\dot{\tilde{P}}_0 - \mu_0\omega^2\tilde{P}_0 \quad (4.5)$$

Слагаемые $-k_0^2\tilde{\mathscr{E}}_0$ и $+\frac{n_0^2}{c^2}\omega^2\tilde{\mathscr{E}}_0$ в сумме равны нулю, так как $k_0 = \frac{n_0\omega}{c}$.

Сократим эти два слагаемых в уравнении (4.5).

Амплитуды $\tilde{\mathscr{E}}_0$ и $\tilde{P}_0$ — медленные функции координат и времени. Тогда высокими производными от амплитуд можно пренебречь по сравнению с низкими производными. Оставим в уравнении (4.5) только наибольшие слагаемые $\tilde{P}_0$, $\dot{\tilde{\mathscr{E}}}_0$, $\tilde{\mathscr{E}}_0'$ для амплитуд $\tilde{\mathscr{E}}_0$ и $\tilde{P}_0$, отбросим более высокие производные и получим:

$$2ik_0\tilde{\mathscr{E}}_0' + 2i\frac{n_0^2}{c^2}\omega\dot{\tilde{\mathscr{E}}}_0 = -\mu_0\omega^2\tilde{P}_0 \mid \cdot\frac{1}{2ik_0} \qquad =>$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_0' + \frac{n_0}{c}\dot{\tilde{\mathscr{E}}}_0 = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c n_0}\tilde{P}_0 \tag{4.6}$$

В системе СГС Гаусса: $\tilde{\mathscr{E}}_0' + \frac{n_0}{c}\dot{\tilde{\mathscr{E}}}_0 = 2\pi i\frac{\omega}{n_0 c}\tilde{P}_0$.

Это и есть укороченное волновое уравнение или уравнение для комплексных амплитуд поля и поляризации.

Получим другую форму уравнения.

Рассмотрим выражение для дифференциала комплексной амплитуды светового поля $\tilde{E}_0$, как функции координаты z и времени t:

$$d\tilde{\mathscr{E}}_0 = \frac{\partial\tilde{\mathscr{E}}_0}{\partial z}dz + \frac{\partial\tilde{\mathscr{E}}_0}{\partial t}dt = \tilde{\mathscr{E}}_0'dz + \dot{\tilde{\mathscr{E}}}_0\,dt$$

Разделим это равенство на дифференциал координаты dz и получим:

$$\frac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz} = \tilde{\mathscr{E}}_0' + \frac{dt}{dz}\cdot\dot{\tilde{\mathscr{E}}}_0.$$

Пусть $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$, тогда

$$\frac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz} = \tilde{\mathscr{E}}_0' + \frac{n_0}{c}\dot{\tilde{\mathscr{E}}}_0 \tag{4.7}$$

Это совпадает с левой частью уравнения (4.6).

Какой смысл приравнивания $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$?

При этом условии мы берем производную $\frac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz}$, как бы сидя верхом на гребне световой волны, которая распространяется со скоростью $\frac{c}{n_0}$. Это так называемая полная производная, она аналогична, например, производной $\frac{d\rho_{11}}{dt}$

в рассмотренных ранее уравнениях для матрицы плотности, где $\frac{d\rho_{11}}{dt}$ — полная производная в системе отсчета атома или как бы сидя верхом на атоме.

Выражение $\frac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz}$ — производная, которая показывает, что происходит с амплитудой световой волны по мере распространения волны вдоль оси z.

Подставим (4.7) в (4.6) и получим

$$\frac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz} = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c n_0}\tilde{P}_0 \tag{4.8}$$

В системе СГС Гаусса: $\frac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c}\tilde{P}_0$.

Это то же самое укороченное волновое уравнение, что и (4.6), но в другой форме.

Получим теперь аналоги комплексных уравнений (4.6) и (4.8) в вещественном виде.

Вместо одной комплексной амплитуды $\tilde{P}_0$ рассмотрим две вещественные амплитуды P_c и P_s. Здесь P_c — синфазная по отношению к световому полю амплитуда, а P_s — квадратурная амплитуда поляризации, сдвинутая по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно фазы светового поля.

$P = P_c\cos(\varphi) + P_s\sin(\varphi) = \mathrm{Re}\left(\left(P_c + iP_s\right)\cdot e^{-i\varphi}\right)$, тогда комплексная амплитуда поляризации выражается через две вещественные амплитуды следующим образом:

$\tilde{P}_0 = P_c + iP_s$.

Аналогичное выражение получаем для напряженности светового поля:

$\tilde{\mathscr{E}}_0 = \mathscr{E}_c + i\mathscr{E}_s$.

Подставим эти выражения в уравнения (4.6) и (4.8). В каждом из полученных комплексных уравнений можно приравнять друг другу вещественные части и мнимые части. В результате получим укороченные волновые уравнения в вещественном виде:

$$\begin{cases} \mathscr{E}_c' + \frac{n_0}{c}\dot{\mathscr{E}}_c = -\frac{\omega}{2\varepsilon_0 c n_0}P_s \\ \mathscr{E}_s' + \frac{n_0}{c}\dot{\mathscr{E}}_s = +\frac{\omega}{2\varepsilon_0 c n_0}P_c \end{cases}$$ из уравнения (4.6) и

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} \mathscr{E}_c' + \frac{n_0}{c}\dot{\mathscr{E}}_c = -2\pi\frac{\omega}{n_0 c}P_s \\ \mathscr{E}_s' + \frac{n_0}{c}\dot{\mathscr{E}}_s = +2\pi\frac{\omega}{n_0 c}P_c \end{cases}$.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathscr{E}_c}{dz} = -\dfrac{\omega}{2\varepsilon_0 c n_0} P_s \\ \dfrac{d\mathscr{E}_s}{dz} = +\dfrac{\omega}{2\varepsilon_0 c n_0} P_c \end{cases}$$ из уравнения (4.8).

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} \dfrac{d\mathscr{E}_c}{dz} = -\dfrac{2\pi\omega}{n_0 c} P_s \\ \dfrac{d\mathscr{E}_s}{dz} = +\dfrac{2\pi\omega}{n_0 c} P_c \end{cases}$.

Рассмотрим частный случай применения укороченных волновых уравнений для прохождения света через оптически тонкий слой среды толщиной Δz.

$\tilde{\mathscr{E}}_{0_{вых}} = \tilde{\mathscr{E}}_{0_{вх}} + \dfrac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz}\Delta z$, где $\tilde{\mathscr{E}}_{0_{вых}}$ — амплитуда света на выходе из среды, $\tilde{\mathscr{E}}_{0_{вх}}$ — амплитуда на входе.

На входе $\begin{cases} \mathscr{E}_c = \mathscr{E}_0 \\ \mathscr{E}_s = 0 \end{cases}$, тогда

$$\begin{cases} \mathscr{E}_{c_{вых}} = \mathscr{E}_0 - \dfrac{\omega}{2\varepsilon_0 c n_0} P_s \cdot \Delta z \\ \mathscr{E}_{s_{вых}} = \dfrac{\omega}{2\varepsilon_0 c n_0} P_c \cdot \Delta z \end{cases}$$ — световое поле на выходе из слоя среды,

где

$$\begin{cases} P_c = \int P_{c_{V_z}} dV_z = \varepsilon_0 \mathscr{E}_0 \int \chi'_{V_z} \, dV_z \\ P_s = \int P_{s_{V_z}} dV_z = \varepsilon_0 \mathscr{E}_0 \int \chi''_{V_z} \, dV_z \end{cases},$$

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} P_c = \int P_{c_{V_z}} dV_z = \mathscr{E}_0 \int \chi'_{V_z} \, dV_z \\ P_s = \int P_{s_{V_z}} dV_z = \mathscr{E}_0 \int \chi''_{V_z} \, dV_z \end{cases}$.

и в свою очередь

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases},$$

В системе СГС Гаусса $\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}$.

как это было показано в вопросе о поляризации среды.

Здесь

$p = \int \psi_1^{\,*} \cdot (\vec{p}, \vec{e}) \cdot \psi_2 \cdot dV$ — дипольный момент перехода (недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны).

$N_0(V_z) = \dfrac{N_0}{\sqrt{\pi} U} \cdot e^{-\frac{V_z^{\,2}}{U^2}}$ — распределение концентрации по лучевой скорости молекул.

$U = \sqrt{\dfrac{2 k_Б T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость молекул газа при температуре T, $k_Б$ — постоянная Больцмана.

$$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma \sqrt{1+G}}\right)\right),$$

где $G \equiv \dfrac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right)$ — фактор насыщения, $R = \dfrac{p \mathscr{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби, $\Omega = \omega - k V_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света в системе отсчета атома относительно частоты перехода, $\mathscr{L}(x) \equiv \dfrac{1}{1+x^2}$ — лоренцевский контур провала Беннета в разности заселенностей.

Показатель преломления и коэффициент поглощения среды.

$$\begin{cases} \tilde{P} = \varepsilon_0 \tilde{\chi} \tilde{\mathscr{E}} \\ \tilde{P} = \tilde{P}_0 \cdot e^{-i\varphi} \\ \tilde{\mathscr{E}} = \tilde{\mathscr{E}}_0 \cdot e^{-i\varphi} \end{cases} \quad =>$$

В системе СГС Гаусса $\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \tilde{\mathscr{E}}_0$.

$\tilde{P}_0 = \varepsilon_0 \tilde{\chi} \tilde{\mathscr{E}}_0$ — комплексная восприимчивость $\tilde{\chi}$ является не только коэффициентом пропорциональности между комплексной поляризацией $\tilde{P}$ и комплексной напряженностью световой волны $\tilde{\mathscr{E}}$, но и является коэффициентом пропорциональности между амплитудами комплексной поляризации и комплексной напряженности световой волны.

Подставим $\tilde{P}_0 = \varepsilon_0 \tilde{\chi} \tilde{\mathscr{E}}_0$ в укороченное волновое уравнение $\dfrac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz} = i \dfrac{\omega}{2 \varepsilon_0 c n_0} \tilde{P}_0$ и получим

$$\frac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz} = i \frac{\omega}{2 c n_0} \tilde{\chi} \tilde{\mathscr{E}}_0 .$$

В системе СГС Гаусса: $\dfrac{d\tilde{\mathscr{E}}_0}{dz} = 2\pi i \dfrac{\omega}{n_0 c} \chi \tilde{\mathscr{E}}_0$.

Решение этого дифференциального уравнения — экспонента:

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{i\frac{\omega}{2cn_0}\tilde{\chi} z} = \mathcal{E}_0\, e^{i\frac{\omega}{2cn_0}\chi' z}\, e^{-\frac{\omega}{2cn_0}\chi'' z}.$$

В системе СГС Гаусса: $\tilde{\mathcal{E}}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{2\pi i\frac{\omega}{n_0 c}\tilde{\chi} z} = \mathcal{E}_0\, e^{2\pi i\frac{\omega}{n_0 c}\chi' z}\, e^{-2\pi\frac{\omega}{n_0 c}\chi'' z}$.

Сравним это решение с ожидаемым выражением:

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{i(k-k_0)z}\, e^{-\frac{æ}{2}z}.$$

Обсудим, почему это выражение ожидаемое.

Сомножитель $e^{-\frac{æ}{2}z}$ связан с определением коэффициента поглощения $æ$ через интенсивность света I:

$$\begin{cases} I = I_0\, e^{-æ z} \\ I \sim \mathcal{E}_0^2 \end{cases} \quad => \quad \mathcal{E}_0 \sim e^{-\frac{æ}{2}z}.$$

Сомножитель $e^{i(k-k_0)z}$ в выражении для $\tilde{\mathcal{E}}_0(z)$ связан с тем, что реальная скорость света в среде $\frac{c}{n}$ заменена нами при выводе укороченных волновых уравнений скоростью $\frac{c}{n_0}$, что соответствует замене $k = \frac{n\omega}{c}$ на $k_0 = \frac{n_0\omega}{c}$.

Вместо $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)}$ мы при выводе укороченных волновых уравнений использовали формулу

$$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)} = \mathcal{E}_0 e^{i(k-k_0)z}\, e^{-i(\omega t - k_0 z - \varphi_0)}.$$

Сравнивая две части правого равенства получим, что

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 \sim e^{i(k-k_0)z}.$$

Тогда, сравнивая два выражения для $\tilde{\mathcal{E}}_0(z)$

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{i\frac{\omega}{2n_0 c}\chi' z}\, e^{-\frac{\omega}{2n_0 c}\chi'' z} \\ \tilde{\mathcal{E}}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{i(k-k_0)z}\, e^{-\frac{æ}{2}z} \end{cases}$$, получим:

$$\begin{cases} k - k_0 = \frac{\omega}{2n_0 c}\chi' \\ æ = \frac{\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}$$

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} k-k_0=\frac{2\pi\omega}{n_0 c}\chi' \\ æ=\frac{4\pi\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}$.

С учетом $n = k\dfrac{c}{\omega}$ первое уравнение можно умножить на $\dfrac{c}{\omega}$ и получить

$$\begin{cases} n - n_0 = \dfrac{1}{2n_0}\chi' \\ \text{æ} = \dfrac{\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \chi' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi'_{V_z}\, dV_z \\ \chi'' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi''_{V_z}\, dV_z \end{cases} \quad \text{и}$$

В системе СГС Гаусса $\begin{cases} n - n_0 = \dfrac{2\pi}{n_0}\chi' \\ \varkappa = \dfrac{4\pi\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}$.

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\varepsilon_0 \hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}, \text{ где } \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21},$$

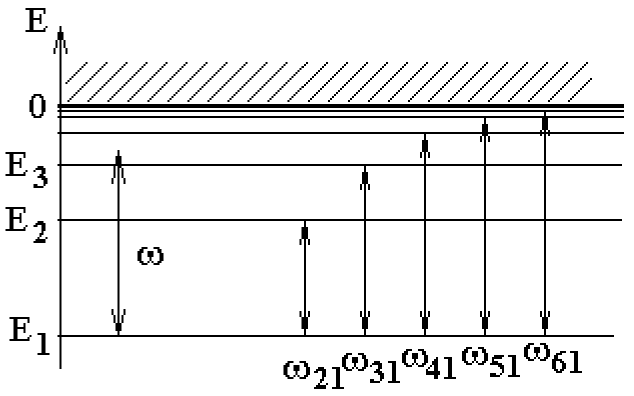
В системе СГС Гаусса $\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}$.

$$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right), \text{ где}$$

$G \equiv \dfrac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right)$ — фактор насыщения, $R = \dfrac{p\mathscr{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

Неравенство $n_0 > 1$ в области прозрачности среды, как влияние хвостов высокочастотных линий поглощения.

Рассмотрим свет с частотой ω в области прозрачности среды. Пусть молекулы среды находятся на нижнем уровне энергии. Оказывается, что справа от частоты ω много линий поглощения ω_{n1} (бесконечно много), то есть неравенство $\omega < \omega_{n1}$ бывает часто, а слева от частоты ω линий поглощения мало, то есть неравенство $\omega_{n1} < \omega$ бывает редко. Это видно из рисунка



Если линия поглощения ω_{n1} находится справа от частоты света ω, то расстройка Ω частоты света относительно частоты перехода отрицательная

$$\omega < \omega_{nk} \quad => \quad \Omega = \omega - \omega_{nk} < 0 \quad => \quad \chi' \sim \left(-\frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2}\right) > 0 \quad =>$$

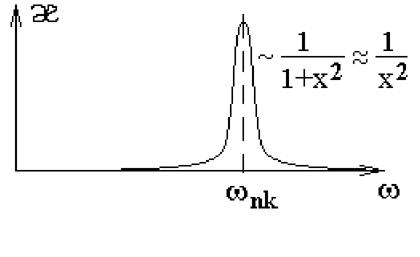
$$n - n_0 = \frac{1}{2n_0}\chi' > 0 \quad => \quad n - n_0 > 0$$

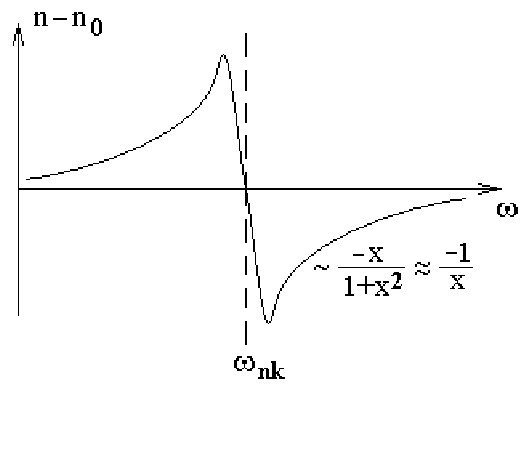
То есть рассматриваемая линия поглощения ω_{n1} дает положительную добавку к показателю преломления.

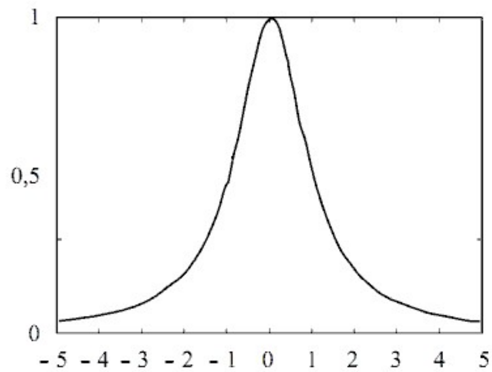
Поскольку линий поглощения справа от частоты света всегда много, и их вклады в показатель преломления положительны, сам показатель преломления в области прозрачности среды оказывается больше, чем в вакууме:

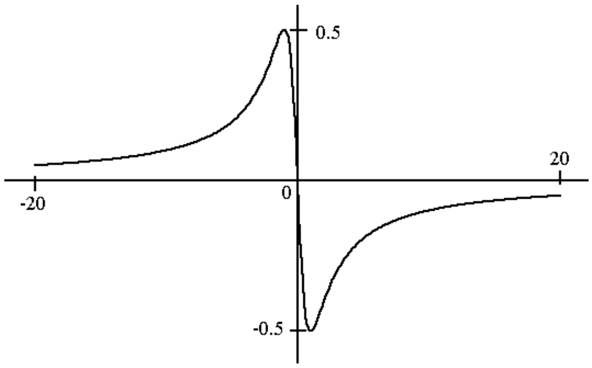
$n_0 > 1$.

При большом частотном удалении от линии поглощения коэффициент поглощения $æ(x)$ убывает пропорционально $\frac{1}{1+x^2} \approx \frac{1}{x^2}$, а добавка к показателю преломления $n - n_0$ убывает гораздо медленнее, пропорционально $\frac{x}{1+x^2} \approx \frac{1}{x}$, где $x = \frac{\Omega}{\Gamma}$ — безразмерная частотная расстройка. Поведение обеих величин в зависимости от частоты света изображено на нижеследующих рисунках.









Нижняя пара рисунков — расчет в MATLAB.

Относительно быстрый спад коэффициента поглощения приводит к тому, что в частотной области, где поглощения практически нет и коэффициент поглощения равен нулю, показатель преломления заметно отличается от единицы.

Дисперсионное соотношение Крамерса — Кронига.

Сигнал на выходе устройства не может появиться раньше, чем на его входе.

Пусть электрическое (или оптическое) устройство имеет комплексный коэффициент передачи $\tilde{K}(\omega)$, где

$\tilde{U}_{вых_\omega} = \tilde{K}(\omega)\cdot\tilde{U}_{вх_\omega}$.

Пусть $U_{вх}(t) = \delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Тогда

$$\tilde{U}_{вх_\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\cdot U(t)\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\cdot\delta(t)\cdot dt = \frac{1}{2\pi}e^{-i\omega\cdot 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot dt = \frac{1}{2\pi}$$

Тогда

$$\tilde{U}_{вых_\omega} = \tilde{K}(\omega)\cdot\tilde{U}_{вх_\omega} = \frac{1}{2\pi}\tilde{K}(\omega) \qquad =>$$

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\cdot\tilde{U}_{вых_\omega}\cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\cdot\tilde{K}(\omega)\cdot d\omega.$$

Сигнал на выходе схемы не может появиться раньше, чем сигнал появляется на входе, тогда $U_{вых}(t) = 0$ при $t < 0$, так как $U_{вх}(t) = \delta(t) = 0$ при $t < 0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\cdot\tilde{K}(\omega)\cdot d\omega = 0 \underline{\text{ при } t < 0}.$$

Амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики любой схемы связаны приведенным выше интегральным соотношением.

В оптике коэффициент передачи тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$ определяется комплексной поляризуемостью молекул $\tilde{\alpha}(\omega)$, то есть коэффициентом пропорциональности между комплексным дипольным моментом молекулы $\tilde{p}$ и комплексной напряженностью светового поля $\tilde{\mathcal{E}}$:

$\tilde{p} = \tilde{\alpha}\tilde{\mathcal{E}}$, где $\tilde{\alpha} = \alpha' + i\alpha''$.

С дипольным комплексным моментом молекул $\tilde{p}$ связана комплексная поляризация среды $\tilde{P} = N_0\tilde{p}$, где N_0 — концентрация молекул.

$\tilde{P} = \varepsilon_0\tilde{\chi}\tilde{\mathcal{E}}$ $\qquad$ $\tilde{\chi} = \dfrac{N_0\tilde{\alpha}}{\varepsilon_0}$ (для разреженного газа) $\qquad$ $\tilde{\chi} = \chi' + i\chi''$

Пусть $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ состоит из вклада на отрицательной и на положительной частоте.

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0\tilde{\chi}(-\omega)\tilde{\mathcal{E}}(-\omega,t) + \varepsilon_0\tilde{\chi}(\omega)\tilde{\mathcal{E}}(\omega,t)\right\} = \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\tilde{\chi}(-\omega)\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} + \tilde{\chi}(\omega)\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}\right\} = \\
&= \left(\chi'(-\omega) + i\chi''(-\omega)\right)\frac{\varepsilon_0\mathcal{E}_0}{2}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right) + \\
&\qquad + \left(\chi'(\omega) + i\chi''(\omega)\right)\frac{\varepsilon_0\mathcal{E}_0}{2}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right) = \\
&= \frac{\varepsilon_0\mathcal{E}_0}{2}\Big(\left(\chi'(\omega) + \chi'(-\omega)\right)\cos(\omega t) + \left(\chi''(\omega) - \chi''(\omega)\right)\sin(\omega t)\Big) + \\
&\qquad + i\frac{\varepsilon_0\mathcal{E}_0}{2}\Big(\left(\chi'(-\omega) - \chi'(\omega)\right)\sin(\omega t) + \left(\chi''(\omega) + \chi''(-\omega)\right)\cos(\omega t)\Big)
\end{aligned}
$$

Из вещественности $P(t)$ следует, что

$$
\begin{cases} \chi'(-\omega) = \chi'(\omega) \\ \chi''(-\omega) = -\chi''(\omega) \end{cases}, \quad \text{соответственно} \quad \begin{cases} \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega) \\ \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega) \end{cases}.
$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл $\int \dfrac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$, в котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерс и Крониг, используя условие $\tilde{\alpha}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$, получили, что интеграл по полуокружности равен нулю. Тогда интеграл по вещественной оси можно взять по вычетам

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{\omega=\omega_0}\left(\frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0}\right) = i\pi\tilde{\alpha}(\omega_0) \qquad =>
$$

$$
\tilde{\alpha}(\omega_0) = -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega
$$

Рассмотрим вещественную часть равенства и получим:

$$\alpha'(\omega_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$$

Заменим в первом интеграле $\omega\to-\omega$ и получим

$$\alpha'(\omega_0)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\alpha''(-\omega)}{\omega+\omega_0}d\omega+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$$

Учтем, что $\alpha''(-\omega)=-\alpha''(\omega)$ и получим

$$\alpha'(\omega_0)=\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\omega\alpha''(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega$$

Здесь $\mathcal{P}\int$ — интеграл в смысле главного значения.

Аналогично рассмотрим мнимую часть равенства

$$\tilde{\alpha}(\omega_0)=-\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$$

и с учетом $\alpha'(-\omega)=\alpha'(\omega)$ получим

$$\alpha''(\omega_0)=-\frac{2\omega_0}{\pi}\mathcal{P}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\alpha'(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega$$

В результате:

$$\begin{cases}\alpha'(\omega_0)=\dfrac{2}{\pi}\mathcal{P}\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\omega\alpha''(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\\[2ex] \alpha''(\omega_0)=-\dfrac{2\omega_0}{\pi}\mathcal{P}\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\alpha'(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\end{cases}.$$

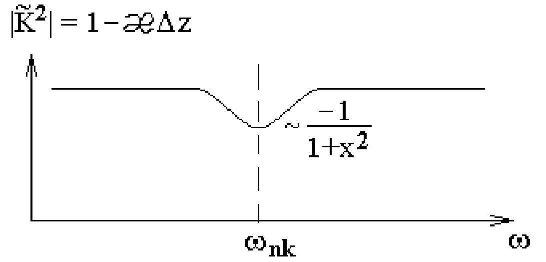
Здесь $\mathcal{P}\int$ — интеграл в смысле главного значения. Эти интегральные связи между $\alpha'(\omega)$ и $\alpha''(\omega)$ означают, что интегрально связаны зависимость коэффициента поглощения от частоты света и зависимость показателя преломления от частоты света. Для оптически тонкого слоя:

$$\begin{cases}\alpha'\sim\chi'\sim(n-n_0)\\ \alpha''\sim\chi''\sim\varkappa\end{cases}.$$

В свою очередь от добавки к показателю преломления и от коэффициента поглощения зависит комплексный коэффициент передачи оптически тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$:

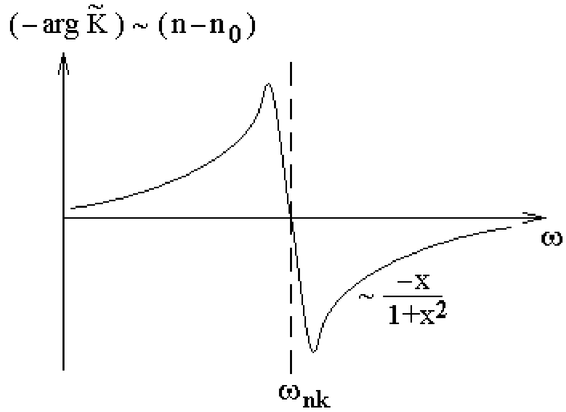
$$\begin{cases} \left|\tilde{K}^2\right| = 1 - æ \cdot \Delta z \\ -\arg\left(\tilde{K}\right) \sim \left(n - n_0\right) \end{cases}$$, если показатель преломления увеличивается, то фаза на выходе больше отстает.

Так если амплитудный коэффициент пропускания имеет провал лоренцевской формы $\left|\tilde{K}\right| = 1 - \frac{æ}{2}\Delta z$

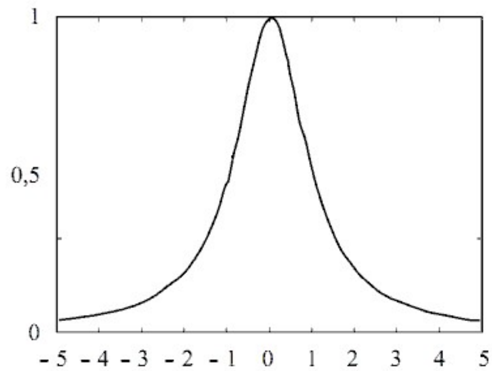


,

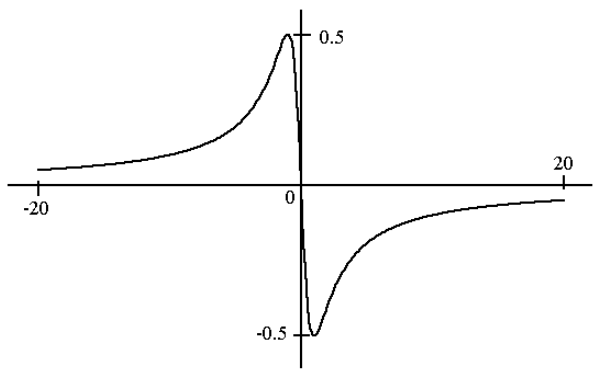
то показатель преломления имеет добавку в виде всплеска дисперсионной формы:



.



$$\mathscr{L}\left(x\right) = \frac{1}{1 + x^2}$$



$$\mathscr{D}\left(x\right) = \frac{-x}{1 + x^2}$$

Если форма провала не совсем лоренцевская, то и форма всплеска не совсем дисперсионная.

<u>Скоростные уравнения или уравнения баланса.</u>

Скоростные уравнения — это приближение, которое получается из условия

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$$

и уравнений для матрицы плотности в приближении вращающейся волны:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1\rho_{11} = \gamma_1\rho_{11}^0 - i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2\rho_{22} = \gamma_2\rho_{22}^0 + i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} - i\Omega\tilde{\rho}_{21} + \Gamma\tilde{\rho}_{21} = i\dfrac{R}{2}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right) \end{cases} \qquad (5.1)$$

где

$R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

$p = \int\limits_{V=\infty} \psi_1^*\left(\vec{p},\vec{e}\right)\psi_2 dV$ — дипольный момент перехода,

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света относительно частоты перехода в системе отсчета молекулы,

$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21}e^{-i\varphi}$ — недиагональный элемент матрицы плотности,

$\varphi = \omega t - kz - \varphi_0$ — фаза световой волны.

Нас в дальнейшем будет интересовать взаимодействие двух световых волн со средой. Если световые волны встречные, то в системе отсчета молекулы две волны будут иметь разные частоты, даже если в лабораторной системе отсчета частоты одинаковы. В таком случае в системе отсчета молекулы амплитуда суммарного светового поля испытывает биения, поэтому условие $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ не выполнено даже для стационарных явлений с двумя световыми волнами.

Однако при условии слабого светового поля, когда $G \ll 1$, так называемые когерентные нестационарные эффекты в наблюдаемых величинах усредняются, и скоростные уравнения дают хорошее приближение.

Подставим $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ в третье уравнение системы (5.1) и получим

$$\tilde{\rho}_{21} = i\frac{R}{2}\cdot\frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} \qquad \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{21}^* - \tilde{\rho}_{21} = -i\frac{R}{2}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)\cdot\frac{2\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \qquad \Rightarrow$$

$$i\frac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) = \frac{R^2\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)}{2\Gamma}\cdot\mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right),$$ где

$\mathscr{L}(x) \equiv \dfrac{1}{1+x^2}$ — лоренцевский контур =>

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - \dfrac{R^2}{2\Gamma}(\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + \dfrac{R^2}{2\Gamma}(\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

Умножим систему на распределение концентрации по лучевой скорости $N_{0_{V_z}}$ и получим

$$\begin{cases} \dot{N}_{1_{V_z}} + \gamma_1 N_{1_{V_z}} = \gamma_1 N_{1_{V_z}}^0 - \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2_{V_z}} + \gamma_2 N_{2_{V_z}} = \gamma_2 N_{2_{V_z}}^0 + \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases} \quad (5.2)$$

Это почти скоростные уравнения, осталось заменить величину R^2 на более традиционное выражение.

Для получения нового вида уравнений нам понадобятся две новые величины: J и σ.

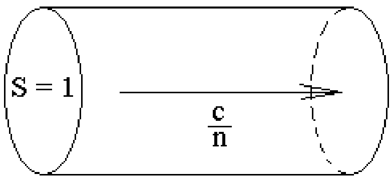
Введем в рассмотрение J — плотность потока фотонов. Эта величина связана с интенсивностью света I, которая представляет собой плотность потока энергии светового поля. Тогда

$$J \equiv \frac{I}{h\nu},$$

где $I \equiv \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени, $\vec{S} = \left[\vec{\mathscr{E}}, \vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга.

В системе СГС Гаусса $\vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{\mathscr{E}}, \vec{H}\right]$.

Рассмотрим цилиндр со световым полем, объемная плотность которого w, а фазовая скорость — $\dfrac{c}{n}$.



Пусть площадь сечения цилиндра равна единице, а длина — $\dfrac{c}{n}$. Тогда объем цилиндра равен их произведению $\dfrac{c}{n}$, а энергия светового поля в этом объеме равна $w\frac{c}{n}$. Вся эта энергия в единицу времени пройдет через единичную площадку. Следовательно,

$$I = \langle w \rangle \frac{c}{n}.$$

Объемную плотность энергии w можно выразить через амплитуду светового поля $\mathcal{E}_0$. И действительно

$$w = \frac{(\vec{D},\vec{\mathcal{E}})}{2} + \frac{(\vec{B},\vec{H})}{2}.$$

В системе СГС Гаусса $w = \frac{1}{8\pi}\left\{(\vec{D},\vec{\mathcal{E}}) + (\vec{B},\vec{H})\right\}$.

В оптике $\mu = 1$ и $\sqrt{\mu_0 \mu} H = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\mathcal{E}$ в бегущей световой волне,

В системе СГС Гаусса $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}\mathcal{E}$.

тогда

$$w = \frac{(\vec{D},\vec{\mathcal{E}})}{2} + \frac{(\vec{B},\vec{H})}{2} = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0 \varepsilon \mathcal{E}^2 + \mu_0 \mu H^2\right\} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathcal{E}^2 = \varepsilon_0 n^2 \mathcal{E}^2.$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad => \quad \left\langle \mathcal{E}^2 \right\rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \quad =>$$

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0 n^2 \mathcal{E}_0^{\ 2}}{2}.$$

В системе СГС Гаусса $\langle w \rangle = \frac{n^2 \mathcal{E}_0^{\ 2}}{8\pi}$.

Тогда

$$J = \frac{I}{h\nu} = \langle w \rangle \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{\varepsilon_0 n c \mathcal{E}_0^{\ 2}}{2\hbar\omega}.$$

В системе СГС Гаусса $J = \frac{nc\mathcal{E}_0^{\ 2}}{8\pi\hbar\omega}$.

Оказывается, что в этом выражении нужно заменить $n \to n_0$.

Такая странность имеет две причины.

Во-первых, часть энергии светового поля принято считать энергией, запасенной в среде. Дело в том, что $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, где поляризация $\vec{P}$ имеет два слагаемых: резонансное $\vec{P}_{рез}$ и нерезонансное $\vec{P}_{нерез}$. Резонансный вклад связан с тем, что молекула может поглощать или излучать свет, только одновременно находясь на двух уровнях энергии. Следовательно, резонансный вклад в поляризацию неразрывно связан с частичным заселением возбужденного уровня энергии. По этой причине соответствующую энергию рассматривают, как энергию среды, а не как энергию светового поля. Тогда обозначим вектор электрического смещения без резонансного вклада в поляризацию, как

$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{нерез} = \varepsilon_0 n_0^2 \vec{E}$, что аналогично $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}$.

Соответственно объемная плотность энергии $\langle w_0 \rangle = \dfrac{\varepsilon_0 n_0^2 \mathcal{E}_0^{\,2}}{2}$.

Кроме того, рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы договорились рассматривать свет, как будто он распространяется со скоростью $\dfrac{c}{n_0}$, а не $\dfrac{c}{n}$.

В результате

$$J = \langle w_0 \rangle \cdot \frac{c}{n_0} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{\varepsilon_0 n_0 c \mathcal{E}_0^{\,2}}{2\hbar\omega}.$$

Введем теперь в рассмотрение новую величину σ — сечение поглощения, которая по своему физическому смыслу должна быть равна площади тени молекулы. Через сечение поглощения σ может быть выражен коэффициент поглощения $æ$.

Коэффициент поглощения определяется зависимостью изменения интенсивности света по мере его распространения в поглощающей среде:

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-æz}$$

С учетом равенства $J \equiv \dfrac{I}{h\nu}$ получим

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-æz}.$$

$(N_1 - N_2)$ — эффективная концентрация поглощающих свет молекул, так как при одинаковых заселенностях верхнего и нижнего уровней энергии число переходов снизу вверх равно числу вынужденных переходов сверху вниз, и поглощение света отсутствует.

$(N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — число этих как бы поглощающих свет молекул в объеме $S \cdot dz$.

$\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — площадь тени этих молекул.

$\dfrac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S}$ — относительная площадь тени или вероятность поглощения фотона на длине dz.

$\left|\dfrac{dJ}{J}\right|$ — тоже вероятность поглощения для фотона на длине dz.

Тогда

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S} \qquad =>$$

$$\frac{dJ}{J} = -\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot dz \qquad =>$$

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot z}.$$

Сравним это выражение с другим: $J(z)=J(0)\cdot e^{-æz}$ и получим

$æ=(N_1-N_2)\cdot\sigma$.

В случае неоднородного уширения спектральной линии $\Gamma<<kU$ величины $æ,\sigma,N_1,N_2$ зависят от лучевой скорости V_z, так как частота света в системе от счета молекулы $\omega'=\omega-kV_z$ зависит от V_z.

Поглощение среды складывается из поглощения молекул с разными лучевыми скоростями

$$æ=\int_{-\infty}^{+\infty}æ_{V_z}dV_z.$$

Соотношение $æ=(N_1-N_2)\cdot\sigma$ можно записать для молекул, лучевая скорость которых лежит в диапазоне от V_z до V_z+dV_z:

$$æ_{V_z}dV_z=\left(N_{1_{V_z}}dV_z-N_{2_{V_z}}dV_z\right)\cdot\sigma(V_z) \qquad =>$$

$$æ_{V_z}=\left(N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}\right)\cdot\sigma(V_z) \qquad =>$$

$$\sigma(V_z)=\frac{æ_{V_z}}{N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}}.$$

Рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы получили, что поглощение среды пропорционально мнимой части комплексной восприимчивости среды $æ_{V_z}=\dfrac{\omega}{cn_0}\chi''_{V_z}$, тогда

В системе СГС Гаусса $æ_{V_z}=\frac{4\pi\omega}{cn_0}\chi''_{V_z}$.

$$\sigma(V_z)=\frac{\frac{\omega}{cn_0}\chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}}.$$

Рассматривая влияние монохроматической световой волны на среду, мы получили выражение для мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$\chi''_{V_z}=\frac{p^2N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z)-\rho_{22}(V_z)\right)}{\varepsilon_0\hbar}\cdot\frac{\Gamma}{\Gamma^2+\Omega^2}=\frac{p^2\left(N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}\right)}{\varepsilon_0\hbar\Gamma}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \qquad =>$$

$$\frac{\chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}}=\frac{p^2}{\varepsilon_0\hbar\Gamma}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Подставим это отношение в формулу для сечения поглощения $\sigma(V_z)=\dfrac{\frac{\omega}{cn_0}\chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}}$ и получим

$$\sigma(V_z) = \frac{\omega p^2}{\varepsilon_0 \hbar c n_0 \Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \qquad\qquad =>$$

В системе СГС Гаусса $\sigma(V_z) = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$.

$$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Здесь $\sigma_0 = \frac{\omega p^2}{\varepsilon_0 \hbar c n_0 \Gamma}$ — амплитуда сечения поглощения, $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего переходы.

Из формулы $\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$ следует, что форма линии поглощения каждой молекулы — лоренцевский контур с шириной 2Γ, где Γ — скорость затухания недиагонального элемента матрицы плотности, она же — скорость затухания поляризации среды.

Рассмотрим выражение

$$\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma(V_z) \cdot J = \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{\varepsilon_0 n_0 c \mathscr{E}_0^2}{2\hbar\omega} =$$

$$= \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \frac{\omega p^2}{\varepsilon_0 \hbar c n_0 \Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{\varepsilon_0 n_0 c \mathscr{E}_0^2}{2\hbar\omega} = \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Сравним это выражение с полученными ранее почти скоростными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{N}_{1_{V_z}} + \gamma_1 N_{1_{V_z}} = \gamma_1 N_{1_{V_z}}^0 - \frac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2_{V_z}} + \gamma_2 N_{2_{V_z}} = \gamma_2 N_{2_{V_z}}^0 + \frac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

и получим скоростные уравнения в окончательном виде:

$$\begin{cases} \dot{N}_{1_{V_z}} + \gamma_1 N_{1_{V_z}} = \gamma_1 N_{1_{V_z}}^0 - \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \\ \dot{N}_{2_{V_z}} + \gamma_2 N_{2_{V_z}} = \gamma_2 N_{2_{V_z}}^0 + \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \end{cases}.$$

Здесь сечение поглощение σ зависит от лучевой скорости V_z в соответствии с формулой:

$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$, где $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты, а амплитуда сечения $\sigma_0 = \frac{\omega p^2}{\varepsilon_0 \hbar c n_0 \Gamma}$.

В системе СГС Гаусса $\sigma_0 = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}$.

Физический смысл скоростных уравнений.

Рассмотрим второе уравнение из системы скоростных уравнений, пренебрегая затуханием и накачкой, и на время забудем о зависимости рассматриваемых величин от лучевой скорости V_z. Тогда

$$\dot{N}_2 = (N_1 - N_2)\sigma J .$$

Здесь правую часть равенства можно преобразовать:

$$\dot{N}_2 = (N_1 - N_2)\sigma J = æJ = -\frac{dJ}{dz} \qquad =>$$

$$\dot{N}_2 = -\frac{dJ}{dz}.$$

Здесь $\dot{N}_2$ — число переходов с нижнего уровня на верхний уровень в единицу времени в единице объема,

$\left(-\frac{dJ}{dz}\right)$ — насколько в единицу времени на единице длины и единице площади влетает фотонов больше, чем вылетает.

Тогда скоростные уравнения отражают тот факт, что скорость потери фотонов равна скорости оптических переходов с нижнего уровня энергии на верхний уровень.

Скоростные уравнения — это условие баланса энергий или равенства числа поглощенных фотонов числу переходов снизу вверх.

По этой причине скоростные уравнения называются также уравнениями баланса.

Уравнения баланса энергий вполне очевидны, и их можно записать без привлечения дифференциальных уравнений для матрицы плотности.

Как же тогда могло оказаться, что балансные уравнения выполняются неточно, а являются результатом приближения $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$?

Скоростные уравнения действительно выполняются неточно. Дело в том, что кроме баланса энергий при выводе уравнений баланса была использована формула $æ = (N_1 - N_2)\sigma$, в которой подразумевается, что поглощение света пропорционально разности заселенностей, что на самом деле справедливо только в случае независящей от времени амплитуды светового поля.

В общем случае коэффициент поглощения пропорционален мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$æ \sim \chi'',$$

а вот мнимая часть комплексной восприимчивости среды пропорциональна разности заселенностей $\chi'' \sim (N_1 - N_2)$ только в стационарном случае, когда амплитуда светового поля не зависит от времени.

Дело в том, что разность заселенностей не гарантирует наличия дипольного момента среды, который появляется под действием светового поля только с некоторым запаздыванием по времени. Пока нет дипольного момента, комплексная восприимчивость равна нулю, как коэффициент пропорциональности между нулевой поляризацией среды и световым полем. Поглощение света средой связано с интерференцией переизлученного молекулами света и света проходящего мимо молекул. Пока нет переизлученного света, нет и поглощения света.

В сухом остатке, уравнение баланса $\dot{N}_2 = -\frac{dJ}{dz}$ выполняется строго и всегда, а скоростное уравнение $\dot{N}_2 = (N_1 - N_2)\sigma J$ выполняется только приближенно, так как уравнение $æ = (N_1 - N_2)\sigma$ справедливо только при постоянной амплитуде светового поля или при медленном по сравнению с частотой Раби $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ изменении амплитуды светового поля.

Импульс предвестник.

Итак, при быстром включении светового поля диполи молекул раскачиваются не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени. Подробнее это явление мы рассмотрим в конце курса в вопросе "Оптические нутации".

В первый момент при включении света в среде нет осциллирующих молекулярных диполей, тогда нет и их излучения, нет изменения амплитуды проходящего света в результате интерференции проходящей волны и волны переизлученной диполями среды, нет даже показателя преломления среды, вызванного далекими крыльями дисперсионных контуров нерезонансных линий поглощения.

В результате в первый момент после быстрого включения света свет распространяется в среде без поглощения и со скоростью света в пустоте.

Рассмотрим слой среды, для которого $æz \approx 200$. Тогда на выходе из среды интенсивность света составляет малую часть $e^{-æz} \approx e^{-200}$ интенсивности света на входе в слой среды. Для сравнения число протонов в видимой части Вселенной — это величина порядка e^{200}. То есть ни одного фотона на выходе из среды не будет. Однако на опыте, если свет на входе в кювету включают быстро, то на выходе появляется короткий световой импульс — импульс предвестник, который проходит среду без поглощения и со скоростью света в пустоте. Если свет слабый $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} < \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — спектральная ширина линии поглощения, то длительность импульса предвестника примерно равна $\frac{1}{æ \cdot z \cdot \Delta\omega} \approx \frac{1}{200 \cdot \Delta\omega}$.