Лекционные демонстрации, 27 минут.

Экзамен. Циркулярно поляризованный свет или свет круговой поляризации.

Свет поляризован по кругу, если вектор $\vec{E}$ вращается вокруг луча.

Факультативная вставка.

В разных учебниках по оптике один и тот же свет называют то светом левой, то светом правой круговой поляризации. Если для вас важно, какую из двух круговых поляризаций называть левой, то вы должны сами дать определение левой и правой круговой поляризации.

В учебнике Бутикова и в монографии Борна и Вольфа дано следующее определение света левой круговой поляризации. Если вы смотрите навстречу лучу и конец вектора $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки, то вы видите свет левой круговой поляризации.

Логика такого определения состоит в том, что если вы смотрите на вращающийся электрический диполь, то диполь, вращающийся налево, излучает в вашем направлении свет левой круговой поляризации.

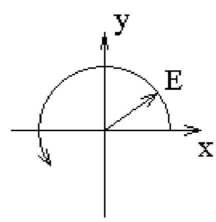
Заметим, что в таком случае направление вращения вектора $\vec{E}$ образует правый винт с направлением света. По этой причине в курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица такой свет называют светом правой круговой поляризации.

Примем определение левой круговой поляризации в соответствии с учебником Бутикова и монографией Борна и Вольфа.

Конец факультативной вставки.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси z, тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Пусть ось z направлена на нас. Для левой круговой поляризации вектор $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки.



Тогда в фиксированной пространственной точке электрическое поле имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad =>$$

Круговая поляризация — это сумма двух линейных поляризаций со сдвигом фаз $\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда в комплексном представлении плоская световая волна левой круговой поляризации имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_0 \cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} \\ \tilde{E}_y = E_0 \cdot e^{i\left(kz-\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_0\right)} \end{cases}, \quad \text{где } \left(\vec{k},\vec{r}\right)=kz \text{, так как } \vec{k}\uparrow\uparrow\vec{e}_z .$$

Объединим две комплексных проекции вектора $\vec{E}$ в один комплексный вектор и получим:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_x\vec{e}_x + \tilde{E}_y\vec{e}_y = E_0\vec{e}_x e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} + E_0\vec{e}_y e^{i\left(kz-\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_0\right)} =$$

$$= E_0\vec{e}_x e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} + E_0\vec{e}_y e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} = E_0\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)\cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)}.$$

Здесь удобно ввести единичный вектор круговой поляризации. Вектор $\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)$ не вполне для этого подходит, так как его длина не равна единице.

Найдем длину вектора $\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)$. Квадрат длины вектора равен скалярному произведению вектора самого на себя. Скалярное произведение двух произвольных комплексных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ выражается через комплексные проекции этих векторов следующим образом:

$$\left(\vec{A},\vec{B}\right) = A_x B_x^{\ *} + A_y B_y^{\ *} + A_z B_z^{\ *}.$$

Пусть в этом равенстве векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равны друг другу $\vec{A}=\vec{B}=\vec{e}_x + i\vec{e}_y$, тогда

$$\left|\vec{A}\right|^2 = \left(\vec{A},\vec{A}\right) = \left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y,\ \vec{e}_x + i\vec{e}_y\right) = 1\cdot 1^* + i\cdot\left(i\right)^* + 0\cdot 0^* = 1\cdot 1 + i\cdot\left(-i\right) = 2.$$

Следовательно, длина вектора $\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)$ равна $\sqrt{2}$. Разделим вектор на его длину и получим единичный вектор.

$$\begin{cases} \vec{e}_+ \equiv \dfrac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- \equiv \dfrac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ — единичные векторы левой и правой круговых поляризаций света, распространяющегося вдоль оси z.

Вернемся к рассмотрению плоской световой волны левой круговой поляризации:

$$\tilde{\vec{E}} = E_0\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)\cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} = \sqrt{2}\cdot E_0\cdot\vec{e}_+\cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)},$$ где E_0 — вещественная амплитуда каждой линейной поляризации.

Будем называть величину $\sqrt{2}E_0$ вещественной амплитудой волны круговой поляризации.

Переобозначим $\sqrt{2}E_0$ за новое E_0, тогда в новых обозначениях:

$\tilde{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_+ e^{i(kz-\omega t+\varphi_0)}$, где $\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}$ — длина вращающегося вектора электрического поля и вещественная амплитуда каждой линейной поляризации, E_0 — вещественная амплитуда круговой поляризации.

Новые обозначения удобны тем, что выражение для интенсивности света $I = \dfrac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \dfrac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} E_0^2$ оказывается справедливым и для линейной и для круговой поляризации света.

В системе СГС Гаусса: $I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2$.

Экзамен. Эллиптическая поляризация света.

Направим ось z вдоль луча, тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Сложим две волны, линейно поляризованные вдоль осей x и y. Пусть разность фаз этих волн произвольна. Суммарную волну можно записать в виде:

$\tilde{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_p e^{i(kz-\omega\cdot t+\varphi_0)}$, где

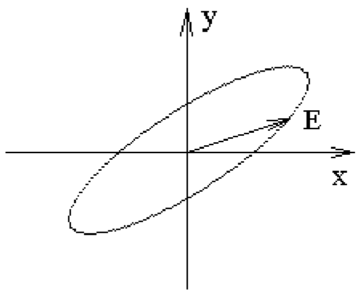
$\vec{e}_p$ — единичный комплексный вектор эллиптической поляризации.

$\vec{e}_p \perp \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{e}_p, \vec{e}_z\right) = 0$

$\vec{e}_p = \dfrac{\tilde{a}\vec{e}_x + \tilde{b}\vec{e}_y}{\sqrt{\left|\tilde{a}\right|^2 + \left|\tilde{b}\right|^2}}$, где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ — произвольные комплексные числа для произвольной эллиптической поляризации.

$\vec{e}_p$ — единичный вектор, что следует из равенства $\left(\vec{e}_p, \vec{e}_p\right) = 1$, которое можно проверить, расписав скалярное произведение в декартовых координатах.

В эллиптически поляризованной волне конец вектора $\vec{E}$ двигается по эллипсу в плоскости перпендикулярной лучу.



Для каждой эллиптической поляризации $\vec{e}_{p1}$ существует ортогональная к ней поляризация $\vec{e}_{p2}$:

$\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) = 0$.

Любую монохроматическую волну, направленную вдоль оси z, бывает удобно представить, как сумму двух не интерферирующих волн: двух ортогональных линейных поляризаций $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$, двух ортогональных круговых поляризаций $\vec{e}_+$ и $\vec{e}_-$ или двух ортогональных эллиптических поляризаций $\vec{e}_{p1}$ и $\vec{e}_{p2}$.

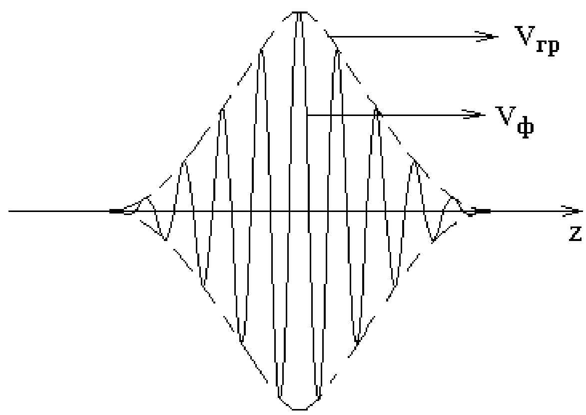
Для света эллиптической поляризации выполняется тоже соотношение между интенсивностью света и амплитудой волны $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} E_0^2$, что и для света линейной и круговой поляризации.

В системе СГС Гаусса: $I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2$.

Неполяризованный или как говорят естественный свет — это обязательно не совсем монохроматический свет. Неполяризованный свет — это свет эллиптически поляризованный, но параметры эллипса случайным образом медленно изменяются во времени. Характерное время изменения параметров эллипса поляризации равно $\frac{1}{\Delta\omega}$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра источника света. Пример неполяризованного света — солнечный свет. Для солнечного света $\Delta\omega \approx \omega$.

Экзамен. Групповая скорость волн.

Рассмотрим световой импульс. Импульс имеет огибающую — относительно медленную функцию координат и времени, и имеет заполнение в виде относительно высокочастотной синусоиды, которую еще называют несущей.



Групповая скорость $V_{гр}$ — это скорость движения огибающей светового импульса.

Фазовая скорость $V_ф$ — это скорость движения заполнения светового импульса, скорость движения несущей.

Групповая скорость волн отличается от фазовой скорости только в том случае, когда фазовая скорость зависит от частоты ω. Зависимость фазовой скорости от частоты называют дисперсией для волн любой природы. Для световой волны $V_ф = \frac{c}{n}$, то есть $V_{гр} \neq V_ф$ при условии $n(\omega) \neq const$. Зависимость показателя преломления света от частоты или длины волны называют дисперсией света.

Групповая скорость — понятие не очень строгое. Это связано с тем, что световой импульс в процессе распространения в среде несколько деформируется, а скорость огибающей при деформации импульса теряет смысл. Поэтому рассмотрим нестрогий вывод формулы для групповой скорости.

Пусть две плоские волны с частотами ω_1 и ω_2 распространяются в направлении оси z. Пусть разность частот мала: $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1$. Пусть вещественные амплитуды двух волн одинаковы и равны A_0.

Рассмотрим волны в вещественном представлении:

$$A(t,z) = A_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) =$$

$$= 2A_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right),$$

где использовано соотношение

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{k_1 + k_2}{2} \equiv k \\ \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \equiv \omega \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} = -\dfrac{\delta\omega}{2} \\ \dfrac{k_1 - k_2}{2} = -\dfrac{\delta k}{2} = -\dfrac{dk}{d\omega} \cdot \dfrac{\delta\omega}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$A(t,z) = 2A_0 \cos\left(-\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} z + \frac{\delta\omega}{2} t\right) \cdot \cos(kz - \omega t) =$$

$$= 2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right) \cdot \cos(kz - \omega t).$$

Здесь $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right)$ — огибающая, которая медленно изменяется при изменении t или z, так как $|\delta\omega| << \omega$.

$\cos(kz - \omega t)$ — несущая.

Для рассматриваемой формы огибающей $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right)$ можно сказать, что $\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}$ — это фаза огибающей. Тогда групповую скорость или скорость движения огибающей можно найти, как скорость движения поверхности равных фаз огибающей.

С этой целью продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз огибающей:

$\left(\frac{dk}{d\omega}z-t\right)\frac{\delta\omega}{2}=const$, где переменные величины только z и t, и получим

$\left(\frac{dk}{d\omega}\cdot\frac{dz}{dt}-\frac{dt}{dt}\right)\cdot\frac{\delta\omega}{2}=0$ =>

$\frac{dz}{dt}=\frac{d\omega}{dk}$ — скорость движения поверхности равных фаз огибающей или скорость движения огибающей, она же по определению равна групповой скорости волн $V_{гр}$. Тогда

$V_{гр}=\frac{d\omega}{dk}$ — групповая скорость для волны любой природы, не только для световой волны. Выражение для групповой скорости $V_{гр}=\frac{d\omega}{dk}$ напоминает выражение для фазовой скорости $V_{ф}=\frac{\omega}{k}$.

Групповая скорость — это скорость передачи информации, поэтому она не может быть больше скорости света в пустоте $V_{гр}\le c$. Формально неравенство $\frac{d\omega}{dk}>c$ возможно, но при этом условии световой импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

Факультативно. Обычно групповая скорость света меньше фазовой скорости.

Это следует из неравенства $\frac{dn}{d\omega}>0$, которое называют условием нормальной дисперсии. Это неравенство будет обосновано позднее. Напомним, что дисперсия света — это зависимость показателя преломления от частоты или от длины волны.

$V_{ф}=\frac{c}{n}=\frac{\omega}{k}$ => $k=\frac{n\omega}{c}$, тогда

$$V_{гр}=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\omega}{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)}=c\frac{d\omega}{d(n\omega)}=\frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}}=\frac{c}{n+\omega\frac{dn}{d\omega}}<\frac{c}{n}=V_{ф}$$ =>

$V_{гр}<V_{ф}$ при условии нормальной дисперсии $\frac{dn}{d\omega}>0$.