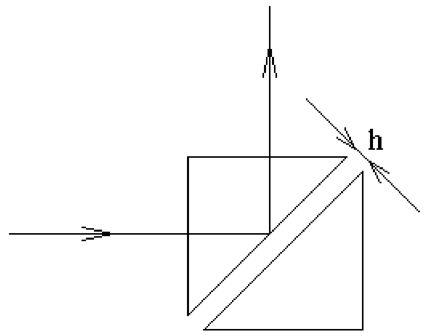
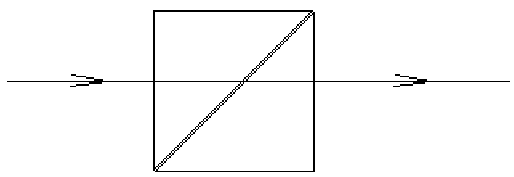
Экзамен. Светоделительный куб. Оптический контакт.

Рассмотрим две стеклянные призмы на малом расстоянии h друг от друга.

Если расстояние $h >> \lambda$, то наблюдается полное внутреннее отражение света, и весь свет отражается.

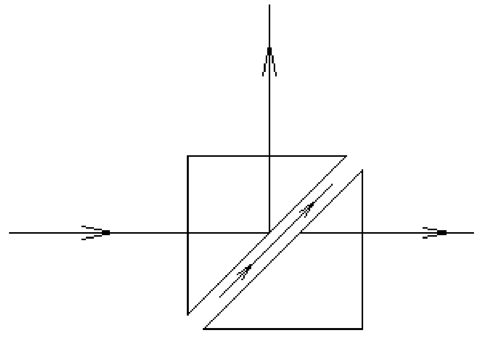


Если же расстояние h нулевое, то нет границы раздела сред, и весь свет проходит насквозь. Если расстояние h между двумя кусками одного и того же материала значительно меньше $\frac{\lambda}{2}$, то эта граница не отражает свет. Это и есть оптический контакт.

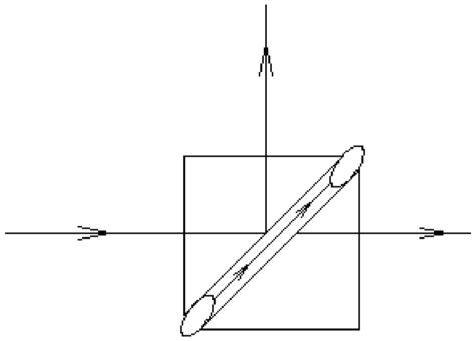


В светоделительном кубе расстояние между двумя стеклянными призмами подбирают так, чтобы половина света отражалась от границы двух призм и половина проходила сквозь границу.

Между двумя призмами параллельно их почти соприкасающимся граням идет плоская неоднородная волна.



Чтобы фиксировать нужное расстояние между призмами светоделительного куба на одну из соприкасающихся поверхностей можно положить кольцо прозрачного эпоксидного клея.



Во время полимеризации клея расстояние между призмами постоянно контролируется по разности интенсивностей отраженной и прошедшей световых волн.

<u>Экзамен. Фазовый сдвиг поляризаций при полном внутреннем отражении света.</u>

При полном внутреннем отражении нет вещественного решения уравнения Снеллиуса $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ относительно угла преломления α_2, так как $\sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_1) > 1$, но комплексное решение есть. Этому комплексному α_2 соответствует чисто мнимый косинус

$$\cos(\alpha_2) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha_2)} = \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\alpha_1)} = \pm i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\alpha_1) - 1}\,.$$

Можно доказать (в факультативной вставке вопроса Плоская неоднородная волна), что в последнем выражении нужно оставить знак "+"

$$\cos(\alpha_2) = i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\alpha) - 1}\,.$$

Через $\cos(\alpha_2)$ выражаются комплексные амплитудные коэффициенты отражения и пропускания для каждой из двух поляризаций света. Коэффициент пропускания позволяет найти комплексную амплитуду плоской неоднородной световой волны, но нас она сейчас интересовать не будет. Рассмотрим амплитудные коэффициенты отражения:

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \dfrac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} \\ r_{\perp} = \dfrac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \end{cases}$$

При чисто мнимом значении $\cos(\alpha_2)$ числитель и знаменатель каждой дроби — комплексно сопряженные величины. То есть при полном внутреннем отражении $|r| = 1$, и отражается вся энергия: $R = |r|^2 = 1$.

Фазовый сдвиг между двумя поляризациями отраженного света равен

$\delta\varphi = \arg(r_{\perp}) - \arg(r_{\parallel})$.

При полном внутреннем отражении света поляризация света перпендикулярная плоскости падения отстает по фазе на величину $\delta\varphi > 0$ от поляризации в плоскости падения.

<u>Факультативная вставка.</u>

Подставим

$$\cos(\alpha_2) = i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\alpha) - 1}\,.$$

в формулы Френеля для амплитудных коэффициентов отражения двух поляризаций света:

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} = \frac{n_2 \cos(\alpha) - i n_1 \sqrt{\left(\dfrac{n_1}{n_2} \sin(\alpha)\right)^2 - 1}}{n_2 \cos(\alpha) + i n_1 \sqrt{\left(\dfrac{n_1}{n_2} \sin(\alpha)\right)^2 - 1}},$$

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} = \frac{n_1 \cos(\alpha) - i n_2 \sqrt{\left(\dfrac{n_1}{n_2} \sin(\alpha)\right)^2 - 1}}{n_1 \cos(\alpha) + i n_2 \sqrt{\left(\dfrac{n_1}{n_2} \sin(\alpha)\right)^2 - 1}}.$$

Световое поле в комплексной форме пропорционально $e^{-i\omega t}$, то есть вращается на комплексной плоскости в сторону отрицательных углов (по часовой стрелке). Аргумент комплексного амплитудного коэффициента отражения отрицателен для каждой поляризации, так как тангенс аргумента равен отношению мнимой и вещественной частей комплексного числа. Отрицательный аргумент означает, что отраженные волны опережают по фазе падающую волну. Фазовый сдвиг для величины $r_{||}$ по модулю больше, чем фазовый сдвиг для величины $r_{\perp}$, так как $n_1 > n_2$. Следовательно, параллельная плоскости падения поляризация света в отраженной волне сильнее опережает по фазе падающую волну.

В следующем вопросе нам понадобится величина запаздывания по фазе $\delta\varphi > 0$ поляризации света перпендикулярной плоскости падения относительно поляризации параллельной плоскости падения при полном внутреннем отражении. Величину $\delta\varphi$ можно найти, как разность фаз отраженных волн двух поляризаций

$$\delta\varphi = arctg\frac{\mathrm{Im}(r_{\perp})}{\mathrm{Re}(r_{\perp})} - arctg\frac{\mathrm{Im}(r_{||})}{\mathrm{Re}(r_{||})} > 0.$$

Сюда можно подставить полученные выражения для величин $r_{\perp}$ и $r_{||}$, а затем упростить выражение для разности фаз и получить:

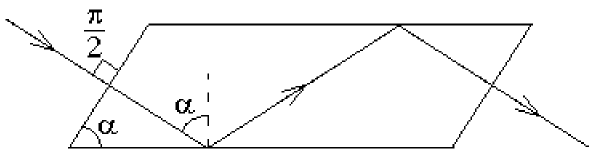
$$\delta\varphi = 2\cdot arctg\left\{\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}tg(\alpha_1)\right)^2 - tg^2(\alpha_1) - 1}\right\} -$$

$$-2\cdot arctg\left\{\frac{n_2}{n_1}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}tg(\alpha_1)\right)^2 - tg^2(\alpha_1) - 1}\right\}.$$

Конец факультативной вставки.

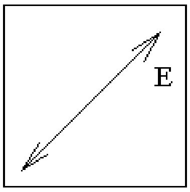
Экзамен. Параллелепипед Френеля.

За одно полное внутреннее отражение не удается получить разность фаз $\frac{\pi}{2}$ для двух линейных поляризаций. За два полных внутренних отражения можно набрать сдвиг фаз $2\cdot\delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ между двумя линейными поляризациями, что позволяет получить циркулярно поляризованный свет из света линейной поляризации.



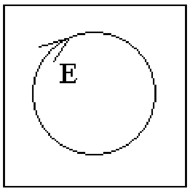
Свет нормально падает на переднюю грань параллелепипеда Френеля. Угол α при вершине параллелепипеда подобран так, чтобы выполнить условие

$2\cdot\delta\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, где $\delta\varphi=arctg\dfrac{\mathrm{Im}(r_{\perp})}{\mathrm{Re}(r_{\perp})}-arctg\dfrac{\mathrm{Im}(r_{\|})}{\mathrm{Re}(r_{\|})}$. При этом, если на вход параллелепипеда Френеля пустить свет линейной поляризации, направленной, как показано на рисунке



,

то на выходе получится свет круговой поляризации



.

Правильное направление круговой поляризации получается при взгляде по ходу луча на обоих рисунках либо при взгляде навстречу лучу на обоих рисунках.

Кристаллооптика.

Экзамен. Направление векторов $\vec{D},\vec{E},\vec{B},\vec{H},\vec{k},\vec{S}$ для плоской монохроматической световой волны в кристалле.

В однородной среде для электрического и для магнитного поля получаются аналогичные волновые уравнения:

$$\Delta\vec{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad \text{и} \qquad \Delta\vec{B}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0\,.$$

В анизотропной кристаллической среде диэлектрическая проницаемость ε становится симметричной матрицей, которую поворотом системы координат можно привести к диагональному виду

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix}.$$

Такие оси координат, в которых $\hat{\varepsilon}$ — симметричная матрица, называют главными диэлектрическими осями кристалла.

В главных диэлектрических осях уравнение для каждой проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ останется волновым уравнением, только со своим значением коэффициента $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Мы знаем, что волновые уравнения имеют решения в виде плоских монохроматических волн. В комплексном представлении эти волны имеют вид: $\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ и $\tilde{\vec{B}} = \tilde{B}_0 \vec{e}\,'_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$. Формально для разных проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на разные главные диэлектрические оси значения вектора $\vec{k}$ могут различаться, но мне такие решения неизвестны, и вряд ли они существуют. Будем считать, что значения вектора $\vec{k}$ одинаковые. Этих решений окажется достаточно много, чтобы можно было считать, что любое световое поле может быть представлено с достаточной точностью в виде суммы таких решений.

Вещественные поля представляют собой вещественную часть этих комплексных выражений. Подставим эти вещественные поля в уравнения Максвелла и посмотрим, при каких условиях поля могут быть решениями уравнений. Далее будем рассматривать вещественные плоские волны. Это рассмотрение полностью повторяет собой доказательство поперечности световых волн в прозрачной изотропной среде, только теперь придется различать направления векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

И электрическое и магнитное поле зависят от координат и времени только через величину $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту величину буквой $\varphi = \left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы, которая может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$, $\vec{D}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$, как производную от сложной функции:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t} = -\omega\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Что в операторном виде можно записать, как:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial t} = -\omega\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Аналогично рассмотрим производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} = k_x\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial\cdot}{\partial x}=k_x\frac{d\cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\vec{e}_x k_x\frac{d}{d\varphi}+\vec{e}_y k_y\frac{d}{d\varphi}+\vec{e}_z k_z\frac{d}{d\varphi}=\vec{k}\frac{d}{d\varphi}.$$

Подставим эти соотношения в 4-е уравнения Максвелла

$$\begin{cases}\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)=0\\ \left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)=0\\ \left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$, где для прозрачной среды учтено $\begin{cases}\rho=0\\ \vec{j}=0\end{cases}$.

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases}\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)=0\\ \left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)=0\\ \left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$, где учтено $\begin{cases}\rho=0\\ \vec{j}=0\end{cases}$.

В анизотропной среде диэлектрическая проницаемость ε — это тензор второго ранга, поэтому в отличие от изотропной среды теперь нужно различать направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

$$\begin{cases}\left(\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{D}\right)=0\\ \left[\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{E}\right]=\omega\dfrac{d}{d\varphi}\vec{B}\\ \left(\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{B}\right)=0\\ \left[\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{H}\right]=-\omega\dfrac{d}{d\varphi}\vec{D}\end{cases}\quad=>\quad\begin{cases}\dfrac{d}{d\varphi}\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0\\ \dfrac{d}{d\varphi}\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\dfrac{d}{d\varphi}\left(\omega\vec{B}\right)\\ \dfrac{d}{d\varphi}\left(\vec{k},\vec{B}\right)=0\\ \dfrac{d}{d\varphi}\left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\dfrac{d}{d\varphi}\left(\omega\vec{D}\right)\end{cases}\quad=>$$

$$\begin{cases}\left(\vec{k},\vec{D}\right)=const\\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\omega\vec{B}+const\\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=const\\ \left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\omega\vec{D}+const\end{cases},$$

где $const$ — константы, независящие от φ. То есть константа не зависит ни от времени, ни от координат, так как вся зависимость электрического и магнитного полей от времени и координат происходит только через зависимость от $\varphi=\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

Нас интересуют только переменные, а не постоянные, электромагнитные поля, поэтому константы в правых частях равенств равны нулю. И действительно. Перенесем все слагаемые кроме константы в левую часть каждого равенства. Через половину периода световой волны левая часть равенства поменяет знак, а правая часть останется той же константой. Это возможно только в том случае, если константа равна нулю.

Тогда

$$\begin{cases}\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0\\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\omega\vec{B}\\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0\\ \left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\omega\vec{D}\end{cases}.$$

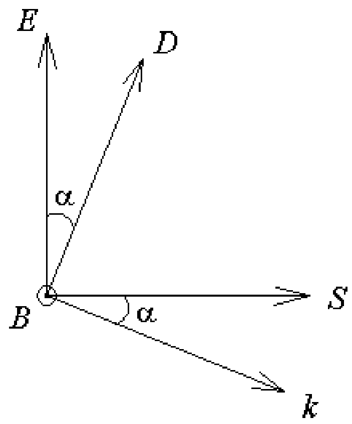
Добавим сюда уравнение $\vec{S}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ и заменим везде вектор $\vec{H}$ на вектор $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$, так как $\vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}$, а в оптике $\mu=1$. В результате получим пять соотношений:

$$\begin{cases}\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0\\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\omega\vec{B}\\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0\\ \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{k},\vec{B}\right]=-\omega\vec{D}\\ \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E},\vec{B}\right]\end{cases} \quad => \quad \begin{cases}\vec{k}\perp\vec{D}\\ \vec{B}\perp\vec{E}\\ \vec{B}\perp\vec{k}\\ \vec{B}\perp\vec{D}\\ \vec{S}\perp\vec{E}\\ \vec{S}\perp\vec{B}\end{cases}.$$

Заметим, что из ортогональности векторов с вещественными координатами следует ортогональность тех же векторов с комплексными координатами.

Из полученных соотношений ортогональности видно, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен 4-м остальным векторам $\vec{k},\vec{D},\vec{E},\vec{S}$. Следовательно, эти 4-е вектора лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$.

Рассмотрим рисунок, на котором вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка, тогда остальные 4-е вектора окажутся в плоскости рисунка:



Из $\begin{cases}\vec{E}\perp\vec{S}\\ \vec{D}\perp\vec{k}\end{cases}$ следует, что углы между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ и углы между векторами $\vec{S}$ и $\vec{k}$ равны, как углы со взаимно ортогональными сторонами. Обозначим соответствующий угол за α:

$$\alpha\equiv\left(\widehat{\vec{D},\vec{E}}\right)=\left(\widehat{\vec{S},\vec{k}}\right) \qquad (7.1)$$

$$\begin{cases}\vec{k}\perp\vec{D}\\ \vec{k}\perp\vec{B}\\ \vec{B}\perp\vec{D}\end{cases} \quad => \quad \text{векторы } \vec{k},\vec{D},\vec{B} \text{ взаимно ортогональны,}$$

$$\begin{cases}\vec{S}\perp\vec{E}\\ \vec{S}\perp\vec{B}\\ \vec{E}\perp\vec{B}\end{cases} \quad => \quad \text{векторы } \vec{S},\vec{E},\vec{B} \text{ взаимно ортогональны.}$$

Напомним, почему в кристалле векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ различаются по направлению.

В кристалле $\vec{D}=\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\vec{E}$, где $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости. $\hat{\varepsilon}$ — симметричный тензор второго ранга. В тензорной алгебре есть теорема о том, что симметричный тензор второго ранга поворотом системы координат можно привести к диагональному виду:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\begin{pmatrix}\varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix}\vec{E}.$$

Если тензор диэлектрической проницаемости диагонален, то оси координат x,y,z — совпадают с главными диэлектрическими осями кристалла по определению главных диэлектрических осей.

Умножение вектора $\vec{E}$ слева на диагональный тензор $\varepsilon_0\hat{\varepsilon}$ означает разное растяжение по осям x, y, z, растяжение в $\varepsilon_0\varepsilon_x, \varepsilon_0\varepsilon_y, \varepsilon_0\varepsilon_z$ раз соответственно. Растяжение по осям различно, поэтому вектор произведения $\vec{D}$ и отличается по направлению от вектора $\vec{E}$ на некоторый угол $\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{E},\vec{D}}\right)$, что можно рассматривать, как некоторый поворот (и растяжение) от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{D}$ при умножении на матрицу $\varepsilon_0\hat{\varepsilon}$.

Факультативная вставка.

Раньше мы выяснили, что в кристалле векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ должны быть ортогональны вектору $\vec{B}$ в плоской световой волне в анизотропной среде. А что будет, если рассматриваемый поворот от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$ выведет вектор $\vec{D}$ из плоскости перпендикулярной вектору $\vec{B}$?

Если условие ортогональности $\vec{D} = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}\vec{E} \perp \vec{B}$ не выполнено, то такое направление вектора $\vec{E}$ невозможно в бегущей в кристалле плоской световой волне. Оказывается (без доказательства), что в этом случае, падающая на кристалл плоская световая волна распадается на две бегущие волны с разными разрешенными в кристалле направлениями поляризации (направлениями вектора $\vec{E}$). Для каждой из этих двух волн будут одновременны выполнены условия $\vec{E} \perp \vec{B}$ и $\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\vec{E} \perp \vec{B}$.

Эти две волны распространяются в кристалле независимо друг от друга и несколько в различающихся направлениях. Это явление расщепления падающей на кристалл плоской волны на две волны называется двулучепреломлением, и связано с тем, что показатели преломления кристалла для этих поляризаций различаются по величине.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Лучевая и фазовая скорости световой волны в кристалле.

И лучевая и фазовая скорости световой волны в кристалле являются аналогами одной и той же фазовой скорости в некристаллической изотропной среде. Групповую скорость волн в кристалле мы рассматривать не будем.

Лучевая скорость $\vec{V}_л$ в кристалле по определению показывает направление движения энергии световой волны, то есть, совпадает по направлению с вектором Пойнтинга $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$:

В системе СГС Гаусса: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$.

$$\vec{V}_л \uparrow\uparrow \vec{S}.$$

В некристаллической изотропной среде вектор Пойнтинга связан с фазовой скоростью $\frac{c}{n}$ и объемной плотностью энергии поля w соотношением:

$$S = w\frac{c}{n}.$$

В этом соотношении можно убедиться, если подставить в него величины:

$$\vec{S}=\left[\vec{E},\vec{H}\right], \qquad w=\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{2}+\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{2},$$

учесть соотношение $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E=\sqrt{\mu_0\mu}H$ для бегущей световой волны. Откуда

$$H=\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E=\sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0\mu_0}}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\mu^2}}E=\frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}E.$$

И действительно, с одной стороны $S=EH=\dfrac{\varepsilon_0 cn}{\mu}E^2$, а с другой стороны

$$w\frac{c}{n}=\left(\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{2}+\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{2}\right)\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu_0\mu H^2}{2}\right)\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=2\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\varepsilon_0\varepsilon E^2=\frac{\varepsilon_0 c\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu}}E^2=\frac{\varepsilon_0 c\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\mu^2}}E^2=\frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}E^2=S.$$

Аналогично, через вектор Пойнтинга $\vec{S}$ и объемную плотность энергии электромагнитного поля w вводится понятие лучевой скорости $\vec{V}_л$:

$$\vec{S}=w\vec{V}_л.$$

Рассмотрим теперь фазовую скорость света в кристалле.

Фазовая скорость — скорость движения поверхности постоянной фазы.

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)$ — фаза любой плоской волны независимо от ее природы.

Направим ось z вдоль волнового вектора $\vec{k}$ => $\vec{k}\uparrow\uparrow\vec{e}_z$ =>

$\left(\vec{k},\vec{r}\right)=k_x x+k_y y+k_z z=k_z z=kz$ =>

$kz-\omega t+\varphi_0$ — фаза волны с волновым вектором $\vec{k}$, направленным вдоль оси z.

Тогда $kz-\omega t+\varphi_0=const$ — уравнение поверхности постоянной фазы, фазовой поверхности или фронта волны.

Возьмем производную по времени от уравнения постоянной фазы, считая, что z координата фронта волны — функция времени.

Тогда

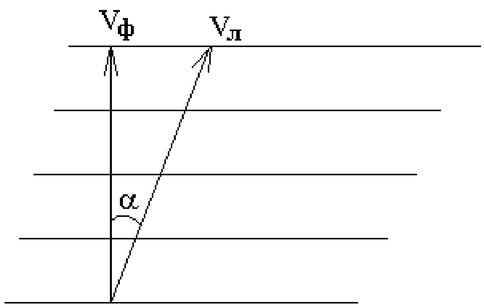
$k\dfrac{dz}{dt}-\omega=0$ => $V_ф=\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\omega}{k}$ =>

$V_ф=\dfrac{\omega}{k}$ — фазовая скорость света в кристалле.

Из формулы $V_ф = \dfrac{dz}{dt}$ следует, что фазовая скорость направлена вдоль оси z, направление которой было выбрано вдоль волнового вектора $\vec{k}$. То есть $\vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{k}$.

Максимумы световой волны содержат максимум энергии и поэтому перемещаются вместе с энергией светового поля с лучевой скоростью $\vec{V}_л$. Как же при этом возможно, что поверхности постоянной фазы перемещаются с другой, фазовой скоростью $V_ф$, и в другом направлении?

Рассмотрим рисунок, показывающий перемещение максимумов световой волны вместе с энергией со скоростью $\vec{V}_л$:



Пусть горизонтальные линии на рисунке — это максимумы напряженности электрического поля и одновременно максимумы энергии светового поля, которые перемещаются в направлении вектора лучевой скорости $\vec{V}_л$. Конечная длина горизонтальных линий отображает конечную ширину пучка лучей. Из рисунка видно, что пучок лучей по мере своего распространения смещается вверх и вправо. Если же считать, что поверхности равных фаз бесконечны по горизонтали и есть даже там, где нет энергии светового поля, то перемещение поверхности равных фаз вдоль самой поверхности равных фаз ничего для нее не меняет. По этой причине скорость перемещения поверхности равных фаз может быть направлена только перпендикулярно самой поверхности. Эта фазовая скорость равна составляющей лучевой скорости в направлении нормали к поверхности равных фаз. Величина фазовой скорости, соответственно, равна проекции лучевой скорости на нормаль к поверхности равных фаз:

$$V_ф = V_л \cos(\alpha).$$

Здесь угол α — угол между векторами $\vec{V}_ф$ и $\vec{V}_л$, а с учетом соотношений $\begin{cases} \vec{V}_л \uparrow\uparrow \vec{S} \\ \vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{k} \end{cases}$, α — угол между векторами $\vec{S}$ и $\vec{k}$, который в свою очередь согласно формуле (7.1) равен углу между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Заметим, что рассчитать величину угла α можно на основе все той же формулы (7.1):

$$\alpha = \left(\widehat{\vec{E},\vec{D}}\right) \qquad => \qquad \left(\vec{D},\vec{E}\right) = D \cdot E \cdot \cos(\alpha) \quad => \quad \cos(\alpha) = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{D \cdot E},$$

где величину и направление вектора $\vec{D}$ можно найти из равенства $\vec{D} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \vec{E}$, а направление вектора $\vec{E}$ зависит от поляризации световой волны.

Напомним еще раз, что в некристаллической изотропной среде лучевая и фазовая скорости совпадают и называются фазовой скоростью света.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>Факультативно. Лучевая и фазовая скорости в простейшем частном случае.</u>

Скорость света в кристалле зависит не от направления света, а от направления поляризации или вектора $\vec{E}$ световой волны. Причина этого в следующем.

В одних направлениях вектор $\vec{E}$ поляризует кристалл сильнее, в других — слабее. Когда кристалл сильно поляризуется на оптической частоте, диполи атомов сильнее излучают, их излучение, интерферируя с проходящей мимо световой волной, не изменяет ее амплитуду, так как мы рассматриваем только прозрачные кристаллы. Сильное излучение диполей сильнее поворачивает фазу волны и сильнее замедляет волну.

В результате скорость света в кристалле зависит именно от направления вектора $\vec{E}$.

Рассмотрим свет, линейно поляризованный вдоль одной из главных диэлектрических осей x, y, z. В главных осях тензор диэлектрической проницаемости имеет следующий вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Пусть, например, вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси z:

$\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$, тогда

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \varepsilon_z \vec{E} \qquad => \qquad \alpha = \left(\widehat{\vec{E},\vec{D}}\right) = 0 .$$

$$\left(\widehat{\vec{k},\vec{S}}\right) = \left(\widehat{\vec{D},\vec{E}}\right) = 0 \qquad => \qquad \left(\widehat{\vec{V}_ф,\vec{V}_л}\right) = \left(\widehat{\vec{k},\vec{S}}\right) = 0 \qquad => \qquad \vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{V}_л .$$

Тогда $\begin{cases} V_ф = V_л \cos(\alpha) \\ \alpha = 0 \end{cases}$, следовательно, $V_ф = V_л$, и с учетом $\vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{V}_л$ получаем: $\vec{V}_ф = \vec{V}_л$ — фазовая и лучевая скорости в кристалле совпадают, если линейная поляризация (вектор $\vec{E}$) направлена вдоль одной из главных диэлектрических осей кристалла.

Для изотропной среды $V_ф = \dfrac{c}{n} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \approx \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Аналогично в рассматриваемом случае поляризации света вдоль главной диэлектрической оси z можно ввести определение величины n_z:

$$V_л = V_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}} \equiv \frac{c}{n_z} \qquad => \qquad n_z \equiv \sqrt{\varepsilon_z} .$$

Аналогично для других главных диэлектрических осей: $n_x \equiv \sqrt{\varepsilon_x}$ и $n_y \equiv \sqrt{\varepsilon_y}$.

Еще раз напомним, что показатели преломления n_x, n_y, n_z соответствуют свету, поляризованному вдоль осей x, y, z, а не свету направленному вдоль этих осей.