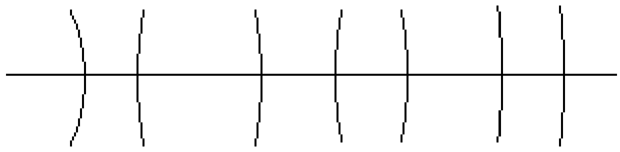
Геометрическая оптика.

Экзамен. Центрированные оптические системы. Оптическая ось.

Центрированная оптическая система — это такая система, в которой все преломляющие границы сферические, и центры всех сфер лежат на одной прямой, называемой оптической осью системы.



Экзамен. Приближение параксиальной оптики.

Будем рассматривать только меридиональные лучи, то есть лучи, которые лежат в одной плоскости с оптической осью системы.

Приближение параксиальной оптики состоит в выполнении двух условий.

1). Все рассматриваемые лучи имеют малый угол с оптической осью.

2). Каждый луч, проходя преломляющую границу, находится на малом расстоянии от оптической оси. Расстояние мало по сравнению с радиусом кривизны преломляющей границы.

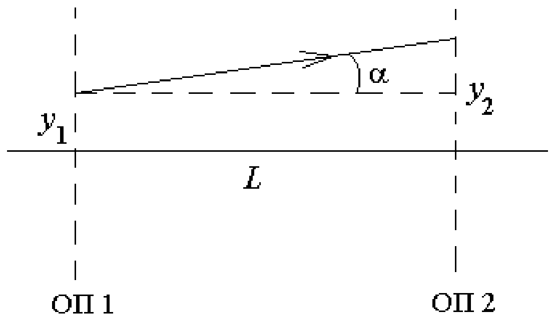
Следующие вопросы будем рассматривать в приближении параксиальной оптики, если не оговорено обратное условие.

Экзамен. Опорная плоскость. Трансляция луча.

Опорная плоскость — любая плоскость перпендикулярная оптической оси.

Трансляция луча — распространение луча в однородной среде.

Рассмотрим трансляцию луча между двумя опорными плоскостями.



Меридиональный луч не может выйти из плоскости первоначального направления луча и оптической оси. Будем считать, что плоскость рисунка совпадает с этой плоскостью. Будем считать, что ось x направлена вдоль оптической оси, а ось y направлена в плоскости рисунка перпендикулярно оптической оси.

Чтобы описать поведение меридионального луча достаточно рассмотреть два параметра луча:

1). y — y-координата луча в плоскости рисунка, модуль которой равен расстоянию от луча до оптической оси.

2). α — угол между лучом и оптической осью, который будем считать положительным, если в направлении луча y-координата луча возрастает.

В приближении параксиальной оптики тангенс малого угла α равен его синусу и равен самому углу:

$tg(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$.

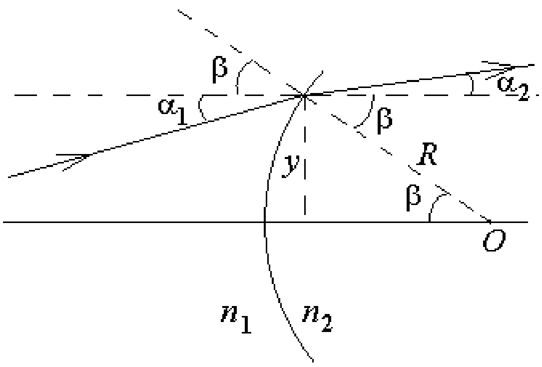
Из рисунка видно, как изменяется параметр y при переходе от одной опорной плоскости к другой:

$y_2 = y_1 + \alpha L$, где L — расстояние между опорными плоскостями, α — угол между лучом и оптической осью.

$y_2 = y_1 + \alpha L$ — уравнение трансляции луча.

Экзамен. Преломление света на сферической границе.

Рассмотрим преломление на сферической границе двух сред.



Здесь $(\alpha_1 + \beta)$ — угол падения света на сферическую границу раздела двух сред, $(\alpha_2 + \beta)$ — угол преломления.

По закону Снеллиуса: $n_1 \sin(\alpha_1 + \beta) = n_2 \sin(\alpha_2 + \beta)$.

В приближении параксиальной оптики все углы малы, тогда:

$n_1(\alpha_1 + \beta) = n_2(\alpha_2 + \beta)$ =>

$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 - (n_2 - n_1)\beta$.

Из рисунка видно, что $\beta = \dfrac{y}{R}$, где R — радиус кривизны сферической границы двух сред, тогда

$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 - \dfrac{n_2 - n_1}{R} y$ — уравнение преломления луча на сферической границе.

Экзамен. Координаты луча. Матрица трансляции. Матрица преломления на сферической границе.

Уравнение трансляции луча и уравнение преломления луча на сферической границе могут быть выражены через такие параметры луча, как y и $n\alpha$. Эти параметры будем называть координатами луча.

Сформируем из двух координат луча вектор $\begin{pmatrix} y \\ n\alpha \end{pmatrix}$ в некотором абстрактном двумерном пространстве.

Рассмотрим, как новые координаты луча выражаются через его старые координаты при трансляции луча и при преломлении на сферической границе.

При трансляции луча:

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + \dfrac{L}{n} n_1\alpha_1 \\ n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 \end{cases}.$$

Индекс 1 относится к параметрам луча в первой опорной плоскости, а индекс 2 — во второй.

Уравнения для трансляции луча можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Назовем матрицу $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицей трансляции.

Заметим, что коэффициенты матрицы не зависят от координат луча y и $n\alpha$. То есть матрица одинакова для всех лучей связывающих две опорные плоскости.

Теперь обсудим изменение координат луча при преломлении на сферической границе.

Будем считать, что две опорные плоскости для преломления луча на сферической границе расположены вплотную с двух сторон сферической границы. Тогда y координата луча почти не изменяется при переходе от одной опорной плоскости к другой.

Преломление на сферической границе следующим образом изменяет координаты луча

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ n_2\alpha_2 = -\dfrac{n_2 - n_1}{R} y_1 + n_1\alpha_1 \end{cases}.$$

Уравнения преломления луча на сферической границе тоже можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Назовем матрицу $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$ матрицей преломления на сферической границе.

Заметим, что, как и для матрицы трансляции, все коэффициенты матрицы преломления на сферической границе не зависят от координат луча y и $n\alpha$. То есть матрица преломления на сферической границе также одинакова для всех лучей связывающих две опорные плоскости.

Экзамен. Матричная оптика.

Одна и та же матрица преобразует координаты любого луча при переходе от одной опорной плоскости к другой. Будем называть эту матрицу матрицей перехода от первой опорной плоскости ко второй.

В центрированной оптической системе с лучом могут происходить только две вещи: трансляция и преломление на сферической границе. Любая оптическая схема может быть представлена, как несколько последовательно включенных элементов, каждый из которых либо трансляция, либо преломление на сферической границе.

Рассмотрим два последовательных элемента оптической схемы и три соответствующие им опорные плоскости. Пусть $\hat{M}_1$ — матрица перехода от первой опорной плоскости ко второй, $\hat{M}_2$ — матрица перехода от второй опорной плоскости к третьей. Тогда

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \hat{M}_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_3 \\ n_3\alpha_3 \end{pmatrix} = \hat{M}_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ n_3\alpha_3 \end{pmatrix} = \hat{M}_2 \cdot \hat{M}_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$\hat{M} = \hat{M}_2 \hat{M}_1$ — матрица перехода от первой опорной плоскости к третьей. Следовательно, матрицы последовательных элементов оптической системы перемножаются. Причем сомножители матриц элементов оптической схемы расположены в обратном порядке по отношению к расположению элементов оптической схемы вдоль луча.

Перемножая матрицы оптических элементов, можно найти матрицу перехода между двумя любыми опорными плоскостями. Таким образом, любой оптической схеме можно сопоставить матрицу.

Экзамен. Оптическая сила сферической границы. Оптическая сила тонкой линзы.

Будем обозначать оптическую силу буквой Φ.

Для сферической границы двух сред по определению:

$$\Phi \equiv \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Тогда матрицу сферической границы можно переписать в новом виде:

$$\hat{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{n_2-n_1}{R} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Phi & 1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две близко расположенные друг к другу сферические границы:

$$\hat{M}=\hat{M}_2\hat{M}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Phi_2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Phi_1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Phi_1-\Phi_2 & 1\end{pmatrix}.$$

Из правой части равенства видно, что две близко расположенных границы имеют такую же матрицу, как и одна сферическая граница с суммарной оптической силой. В этом смысле оптические силы близко расположенных сферических границ складываются $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$.

Рассмотрим тонкую линзу в вакууме.

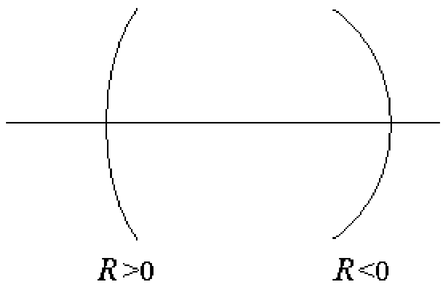
Линза — это две сферические границы. Для одной сферической границы оптическая сила $\Phi=\dfrac{n_2-n_1}{R}$.

Для тонкой линзы в вакууме:

$$\Phi=\frac{n-1}{R_1}+\frac{1-n}{R_2}=(n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),$$ тогда

$\Phi=(n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$ — оптическая сила тонкой линзы в вакууме, где для двояковыпуклой линзы $\begin{cases}R_1>0\\ R_2<0\end{cases}$.

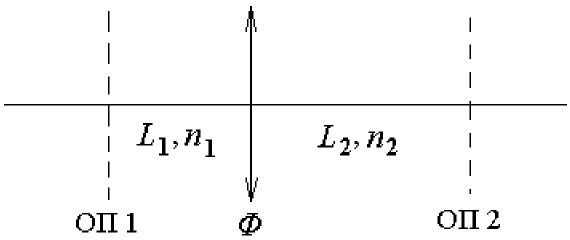
Введем правило знаков для радиуса кривизны сферической границы.



Будем считать, что $R>0$, если центр сферы находится справа от сферической границы, то есть имеет положительную координату вдоль оптической оси, если начало координат принять в месте расположения сферической границы.

Экзамен. Изображение точечного источника света. Сопряженные плоскости. Формула тонкой линзы.

Рассмотрим линзу с оптической силой Φ и опорные плоскости с двух сторон линзы на расстоянии L_1 и L_2 от линзы. Пусть n_1, n_2 — показатели преломления сред с двух сторон линзы.



Найдем матрицу перехода от опорной плоскости 1 к опорной плоскости 2, как произведение трех матриц: матрицы перехода от линзы ко второй опорной плоскости, матрицы тонкой линзы и матрицы перехода от первой опорной плоскости к тонкой линзе.

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_1}{n_1} \\ -\Phi & 1-\frac{L_1}{n_1}\Phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{L_2}{n_2}\Phi & \frac{L_1}{n_1}+\frac{L_2}{n_2}-\frac{L_1}{n_1}\cdot\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi \\ -\Phi & 1-\frac{L_1}{n_1}\Phi \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \hat{M} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}$ найдем y_2 через y_1 и $n_1\alpha_1$:

$$y_2 = \left(1-\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi\right)\cdot y_1 + \left(\frac{L_1}{n_1}+\frac{L_2}{n_2}-\frac{L_1}{n_1}\cdot\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi\right)\cdot n_1\alpha_1 .$$

Изображение точечного источника в линзе — точка пересечения всех лучей, выходящих из источника и прошедших линзу.

Сопряженные плоскости — это плоскость предмета и плоскость изображения. Подразумевается, что обе плоскости перпендикулярны оптической оси.

Пусть опорные плоскости 1 и 2 являются сопряженными плоскостями тонкой линзы.

Если в опорной плоскости 1 находится точечный источник света, то из этой точки в предметной плоскости ОП 1 под любыми углами α_1 к оптической оси выходят лучи. Если плоскость ОП 2 — плоскость изображения, то лучи после прохождения линзы соберутся в одной точке y_2 плоскости ОП 2. В этом случае y_2 не зависит от α_1. Для того чтобы y_2 не зависело от α_1 необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при α_1 в выражении для y_2 был бы равен нулю:

$$\frac{L_1}{n_1}+\frac{L_2}{n_2}-\frac{L_1}{n_1}\cdot\frac{L_2}{n_2}\cdot\Phi=0.$$

Выразим из этого равенства оптическую силу линзы Φ и получим

$$\Phi=\frac{n_2}{L_2}+\frac{n_1}{L_1}.$$

Вместо расстояний L_1 и L_2 введем координаты сопряженных плоскостей линзы относительно самой линзы: a — координата предметной плоскости, b — координата плоскости изображения. Тогда

$$\begin{cases} a=-L_1 \\ b=L_2 \end{cases} \quad =>$$

$$\Phi=-\frac{n_1}{a}+\frac{n_2}{b}$$ — формула тонкой линзы, где a и b — координаты предметной плоскости и плоскости изображения, n_1 и n_2 — показатели преломления среды с двух сторон линзы, Φ — оптическая сила линзы.

Обычно $\begin{cases} n_1=n_2=1 \\ a<0 \\ b>0 \end{cases}$. В этом случае $\Phi=\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}$.

Заметим, что b (x-координата изображения) не зависит от y-координаты источника. Это означает, что для предметной опорной плоскости, перпендикулярной оптической оси, изображение будет тоже в некоторой плоскости перпендикулярной оптической оси (в плоскости изображения). То есть исходное предположение о сопряженных опорных плоскостях было правильным предположением.

Экзамен. Фокальная плоскость линзы. Фокус. Фокусное расстояние.

Фокальная плоскость линзы — плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости.

Фокус — точка пересечения фокальной плоскости с оптической осью.

Фокусное расстояние — координата фокуса относительно линзы.

Передняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости изображения. Пусть переднее фокусное расстояние равно f_1. Тогда

$$\Phi=-\frac{n_1}{f_1}+\frac{n_2}{+\infty} \quad => \quad \Phi=-\frac{n_1}{f_1}.$$

Рассмотрим теперь фокусное расстояние за линзой или заднее фокусное расстояние f_2. Задняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной предметной плоскости. Тогда

$$\Phi = -\frac{n_1}{-\infty} + \frac{n_2}{f_2} \qquad => \qquad \Phi = \frac{n_2}{f_2}.$$

Объединяя формулу тонкой линзы и две формулы для фокусных расстояний, получим:

$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} \qquad =>$$

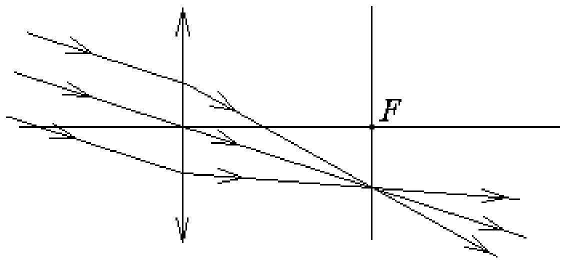
$-\frac{n_1}{f_1} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2}{f_2}$ — это тоже формулы тонкой линзы.

В простейшем случае $\frac{1}{|f|} = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}$, когда $n_1 = n_2 = 1$.

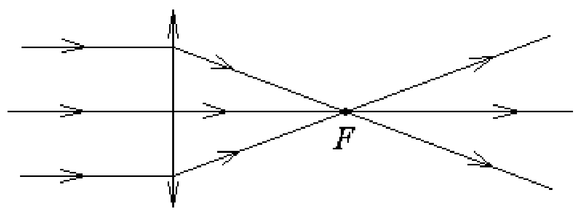
Если точечный источник света расположен очень далеко, то радиус фронта волны очень большой, и волна почти плоская. Плоской световой волне соответствует параллельный пучок лучей.

Рассмотрим падающий на линзу параллельный пучок лучей. Можно считать, что этот пучок лучей выходит из точечного источника, расположенного бесконечно далеко слева от линзы. Сопряженная бесконечно удаленному источнику плоскость совпадает с фокальной плоскостью линзы по определению фокальной плоскости.

Следовательно, параллельный пучок лучей линза собирает в одну точку в фокальной плоскости.



Пучок лучей параллельный оптической оси в соответствии с осевой симметрией задачи собирается в фокусе линзы.

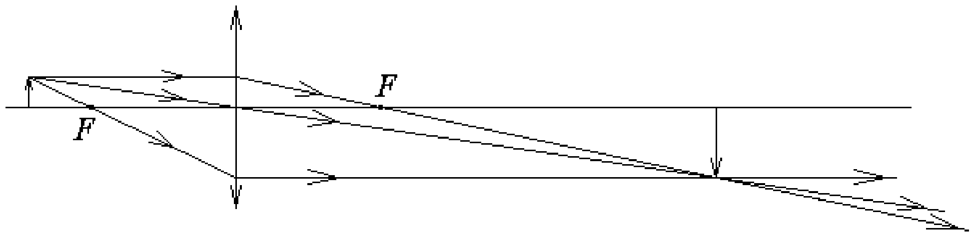


<u>Экзамен. Построение изображений в тонкой линзе. Действительное и мнимое изображение.</u>

Изображение действительное, если оно расположено за линзой. Изображение мнимое, если лучи за линзой не пересекаются, а пересекаются лишь их продолжения в область перед линзой.

В соответствии с этим, если в плоскость действительного изображения поместить экран, то на экране будет видно изображение, если же экран поместить в плоскость мнимого изображения, то на экране изображения не будет.

Пример построения действительного изображения приведен на рисунке ниже:



.

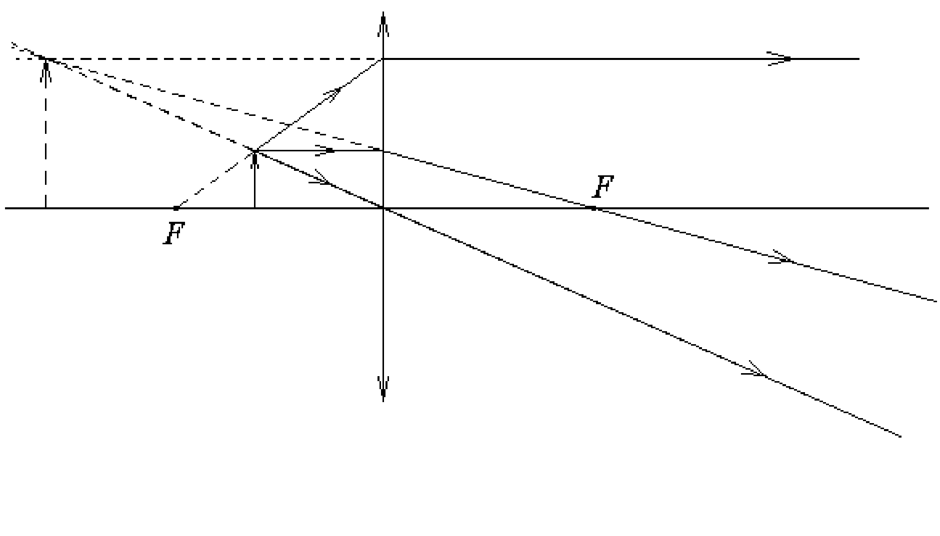
Для построения изображения точечного источника в тонкой линзе достаточно найти пересечение двух любых лучей, выходящих из точечного источника. Для этой цели есть три удобных луча.

1-ый луч — это луч, который до линзы идет параллельно оптической оси. После линзы этот луч проходит через задний фокус линзы.

2-ой луч до линзы проходит через передний фокус. После линзы этот луч проходит параллельно оптической оси.

3-ий луч проходит через центр тонкой линзы. После линзы этот луч проходит без изменения направления, если показатель преломления среды до и после линзы один и тот же. Дело в том, что центральная часть тонкой линзы похожа на плоскопараллельную пластинку, которая не изменяет направления проходящего через нее луча.

Пример построения мнимого изображения с теми же тремя лучами приведен на рисунке приведенном ниже:



.