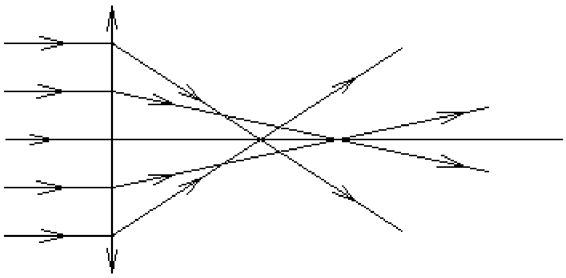
Экзамен. Аберрация. Хроматическая и сферическая аберрация, астигматизм, дисторсия, кома (продолжение).

2). Сферическая аберрация. Участки линзы больше удаленные от оптической оси обладают большей оптической силой и имеют меньшее фокусное расстояние.



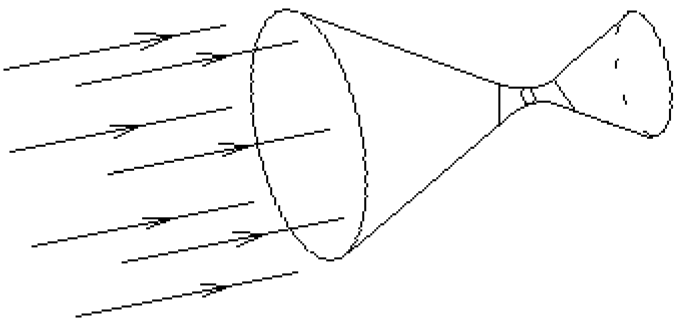
Сферическая аберрация тем слабее, чем меньше отношение радиуса линзы к радиусам кривизны сферических поверхностей линзы.

3). Астигматизм.

Стеклянный шар можно рассматривать, как толстую линзу. Стеклянный цилиндр можно рассматривать, как толстую сильно астигматичную линзу. Направим свет перпендикулярно оси цилиндра. Проходя через цилиндр, свет будет собираться в плоскости перпендикулярной оси цилиндра, но не будет собираться в плоскости, проходящей через ось цилиндра.

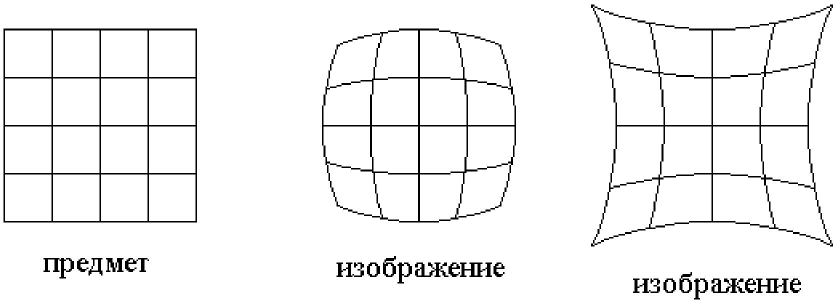
Астигматичная линза по-разному собирает свет в двух ортогональных плоскостях, проходящих через оптическую ось системы. В этих двух плоскостях астигматичная линза имеет разные оптические силы и соответственно разные фокусные расстояния.

Астигматизм проявляется в том, что пучок лучей, идущий параллельно оптической оси собирается не в одной точке в фокусе. Свет собирается сначала, например, в вертикальный отрезок, а затем в горизонтальный отрезок, как я это пытался изобразить на рисунке.



Если линзу повернуть вокруг оптической оси на 90^0, то свет наоборот сначала соберется в горизонтальный отрезок, а затем в вертикальный.

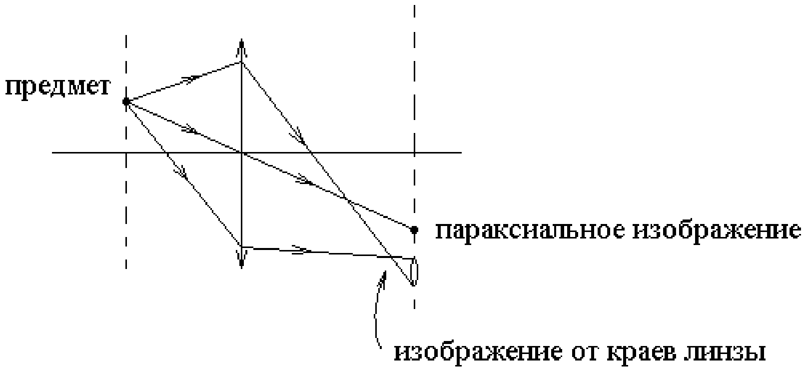
4). Дисторсия или бочка — такое искажение изображения, при котором предмет в виде сетки имеет изображение в виде бочки. Подразумевается, что предмет и его изображение расположены в плоскости перпендикулярной оптической оси.



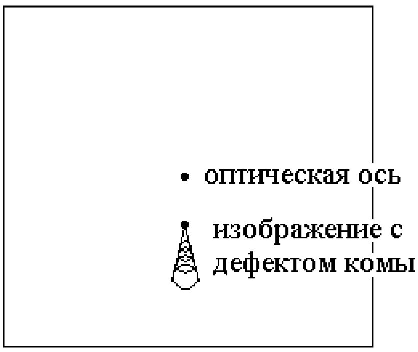
Дисторсия — это разное увеличение на оптической оси и на периферии изображения.

5). Кома (в переводе с греческого — хвост) проявляется только для внеосевых пуков света.

Обычно кома присутствует в сочетании со сферической аберрацией. В результате луч, проходящий через центр линзы, дает изображение в одной точке, а лучи проходящие через края линзы дают смещенное от оптической оси изображение в виде кольца.

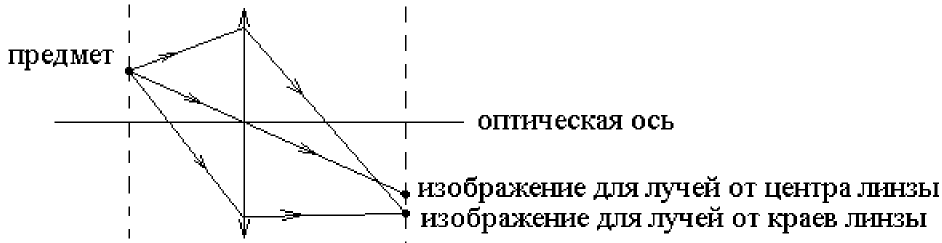


Если линзу мысленно разбить на кольца, то лучи, проходящие через разные кольца линзы, дают разные кольца изображений, которые вместе создают изображение в виде воланчика или кометы.



Название аберрации кома связано с тем, что изображение точечного предмета похоже на комету с пушистым хвостом.

Если рассмотреть аберрацию кома без сферической аберрации, то кома сводится к тому, что луч, проходящий через центр линзы, дает изображение в одной точке, а лучи проходящие через края линзы дают изображение, смещенное от оптической оси, как это показано на рисунке ниже.



В этом случае изображение точечного предмета имеет форму вертикального отрезка.

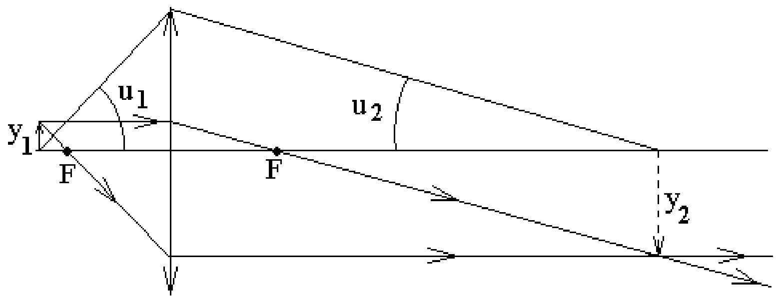
Факультативная вставка.

При выполнении так называемого условия синусов Аббе две крайние точки изображения, приведенные на рисунке выше, сольются в одну точку. Можно сказать, что аберрация кома при соблюдении условия синусов пропадает.

Условие синусов имеет следующий вид:

$$n_1 y_1 \sin(u_1) = n_2 y_2 \sin(u_2),$$

где углы u_1 и u_2 не обязательно малы. Условие выполняется для любого малого отрезка y_1 и его изображения y_2.



При заданной линзе условие синусов может быть выполнено только для двух положений предмета вдоль оптической оси. Второе положение получается из первого, если поменять местами расстояния от линзы до предмета и от линзы до изображения. Условие синусов устраняет аберрацию кома.

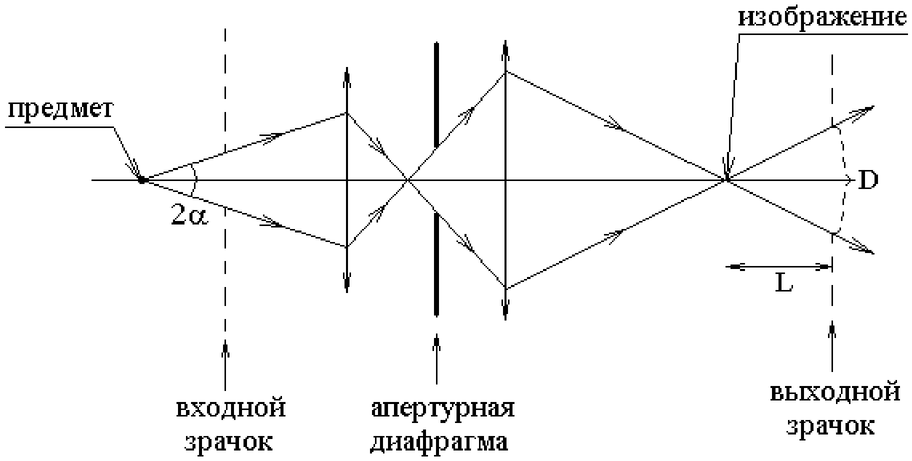
Конец факультативной вставки.

Факультативно. Апертурная диафрагма. Входной и выходной зрачок. Апертура. Относительное отверстие.

Эти понятия применимы к оптической системе, состоящей из одной или нескольких линз.

Рассмотрим точечный источник света, расположенный на оптической оси, и его изображение. Лучи, проходящие через линзы оптической системы, диафрагмируются размерами линз или специально установленными диафрагмами.

Диафрагма или линза, которая сильнее всего диафрагмирует пучок лучей, называется апертурной диафрагмой.



Изображение апертурной диафрагмы в той части оптической системы, которая расположена перед этой диафрагмой, называется входным зрачком оптической системы. В изображение попадают те, и только те лучи, выходящие из точечного источника, которые направлены в область входного зрачка системы.

Если перед апертурной диафрагмой нет линз, то входной зрачок оптической системы совпадает с самой апертурной диафрагмой.

Выходной зрачок системы — это изображение апертурной диафрагмы в той части оптической схемы, которая расположена за апертурной диафрагмой. Если линз за апертурной диафрагмой нет, то апертурная диафрагма совпадает с выходным зрачком системы.

Апертура 2α — это угловой диаметр входного зрачка при наблюдении его из точки расположения предмета.

Относительное отверстие $\dfrac{D}{L}$ — это отношение диаметра выходного зрачка D к расстоянию от выходного зрачка до точки изображения предмета L.

В старых фотоаппаратах диаметр диафрагмы можно регулировать вручную. При этом числовое значение диафрагмы равно величине обратной к относительному отверстию.

Экзамен. Распространение света в неоднородной среде. Эйконал. Уравнение эйконала.

Эйконал — от греческого слова eikon — изображение (сравните со словом икона).

Будем называть оптической длиной произведение nl, где l — геометрическая длина, n — показатель преломления среды.

Дадим сначала предварительное определение эйконала справедливое для частного случая, а затем его расширим. Эйконал — это оптическая длина пути вдоль луча света.

Пусть L — эйконал, тогда $dL \equiv n\,dl$, если отрезок dl направлен вдоль луча. Здесь рассматривается малый отрезок *dl*, так как показатель преломления среды *n* может изменяться от точки к точке.

Тогда

$\dfrac{\partial L}{\partial l} = n$, где $\dfrac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль луча.

Покажем, что оптическая длина пути пропорциональна разности фаз световых волн в начале и в конце пути. И действительно, рассмотрим разность фаз $\Delta\varphi$ световых волн в начале и в конце пути некоторого луча. Разность фаз $\Delta\varphi$ можно выразить через время распространения луча Δt. Пока фаза в течение времени Δt распространяется от первой точки до второй, фаза в первой точке изменится на $\omega\Delta t$. Следовательно, разность фаз в последний момент времени в этих двух точках равна:

$\Delta\varphi = \omega\,\Delta t = \omega\dfrac{\Delta l}{V_\phi} = \omega\dfrac{\Delta l}{\frac{c}{n}} = \dfrac{\omega}{c}\,n\,\Delta l = k_0\,n\,\Delta l = k_0\,\Delta L$, где $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0} = \dfrac{\omega}{c}$ — волновое число, если свет этой частоты будет распространяться в вакууме.

При переходе из среды в среду частота света сохраняется, а длина волны и волновое число изменяются.

$\Delta\varphi = k_0\,\Delta L$ — разность фаз $\Delta\varphi$ в начале и в конце пути пропорциональна оптической длине пути ΔL.

В соответствии с этим результатом дадим второе более общее (и правильное) определение эйконала:

$L \equiv \dfrac{\varphi}{k_0}$, где k_0 — волновое число в вакууме, φ — начальная фаза световой волны или фаза в нулевой момент времени. Начальная фаза $\varphi(\vec{r})$ в каждой точке пространства своя, тогда во втором определении эйконала окажется, что эйконал $L(\vec{r})$ определен в каждой точке пространства $\vec{r}$ волны с широким фронтом, а не только на одной кривой вдоль луча, как в первом (предварительном) определении эйконала.

В малом объеме можно считать, что показатель преломления почти постоянный $n \approx const$, то есть среда почти однородная, а световая волна почти плоская, если радиус кривизны фронта волны гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Для плоской волны в однородной среде направление луча перпендикулярно поверхности равных фаз, то есть перпендикулярно поверхности, на которой постоянен эйконал $L = const$, так как эйконал пропорционален фазе $L \equiv \dfrac{\varphi}{k_0}$.

Градиент любого скалярного поля перпендикулярен поверхности постоянного значения этого поля. Тогда градиент эйконала $\vec{\nabla}L$ перпендикулярен поверхности $L = const$, а с учетом того, что направление луча перпендикулярно поверхности $L = const$, получим, что градиент эйконала $\vec{\nabla} L$ направлен вдоль луча.

Проекция градиента скалярного поля на любое направление равна производной от скалярного поля по этому направлению. Тогда для любого скалярного поля модуль градиента равен производной от поля по направлению градиента:

$\left|\vec{\nabla} L\right| = \frac{\partial L}{\partial l}$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль луча, а с учетом того, что $\frac{\partial L}{\partial l} = n$, получаем

$\left|\vec{\nabla} L\right| = n$ =>

$\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$, где $\vec{e}_s \equiv \frac{\vec{S}}{\left|\vec{S}\right|}$ — единичный вектор вдоль луча, где $\vec{S}$ — вектор Пойнтинга, который направлен вдоль луча по самому смыслу луча.

$\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$ — уравнение эйконала. =>

$\left(\vec{\nabla} L\right)^2 = n^2$ — это уравнение тоже называют уравнением эйконала.

Факультативно. Эйконал по Бутикову.

В книге Е. И. Бутикова "Оптика" и в монографии М. Борна и Э. Вольфа "Основы оптики" определением эйконала L является выражение для напряженности светового поля:

$$\tilde{\vec{E}}\left(t, \vec{r}\right) = E_0\left(\vec{r}\right) \cdot \tilde{\vec{e}}_p\left(\vec{r}\right) \cdot e^{i\left(k_0 L\left(\vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0\right)}$$

Это определение отличается от нашего второго определения эйконала несущественной константой φ_0.

Экзамен. Уравнение для вычисления траектории луча в неоднородной среде.

Возьмем градиент от уравнения $\frac{\partial L}{\partial l} = n$ и получим

$$\vec{\nabla} n = \vec{\nabla} \frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \vec{\nabla} L = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) \qquad =>$$

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right)$$

Разложим производную от произведения и получим

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) = \vec{e}_s \frac{\partial n}{\partial l} + n\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$$

откуда выразим $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$ и получим уравнение, позволяющее вычислять траекторию луча в неоднородной среде:

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l} = \frac{1}{n}\vec{\nabla} n - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial l}\vec{e}_s .$$

И действительно, перепишем это уравнение в виде

$$d\vec{e}_s = \left(\frac{1}{n}\vec{\nabla} n - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial l}\vec{e}_s\right) dl \qquad (11.1).$$

Это уравнение позволяет найти изменение направления луча $d\vec{e}_s$ при небольшом перемещении dl вдоль луча. Если в исходной точке пространства $\vec{r}$ задано направление луча $\vec{e}_s$ и в каждой точке среды известен показатель преломления $n(\vec{r})$, то в исходной точке пространства можно вычислить выражение в скобках в правой части уравнения (11.1). Тогда уравнение (11.1) позволяет найти изменение вектора $\vec{e}_s$ и новое направление луча в соседней точке вдоль луча на расстоянии dl от исходной точки. Затем новую точку и новое направление луча можно рассматривать, как исходные, и повторить процедуру.

Уравнение (11.1) показывает, в каком направлении поворачивает луч в неоднородной среде. Формула для изменения единичного вектора вдоль луча содержит два слагаемых. Второе слагаемое направлено вдоль луча $\vec{e}_s$ и не изменяет его направления. Первое слагаемое $\frac{1}{n}\vec{\nabla} n\, dl$ направлено, как и градиент показателя преломления $\vec{\nabla} n$. Градиент направлен в сторону увеличения показателя преломления.

Следовательно, луч поворачивает в оптически более плотную среду, в среду с большим показателем преломления.

<u>Факультативная вставка.</u>

Равенство $n \cdot \sin(\alpha) = const$ с учетом того, что луч поворачивает в плоскости луча и градиента показателя преломления, эквивалентно равенству $d\vec{e}_s = \left(\frac{1}{n}\vec{\nabla} n - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial l}\vec{e}_s\right) dl$.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>Экзамен. Принцип Ферма.</u>

Принцип Ферма утверждает, что свет распространяется по пути, который занимает минимум времени.

Минимальное время распространения от точки I до точки II означает, что

$$\int_{I}^{II} dt = \min .$$

$$dt = \frac{dl}{V_{ф}} = \frac{dl}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} n\, dl \qquad =>$$

$$\int_I^{II} \frac{1}{c} n\,dl = \min \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_I^{II} n\,dl = \min .$$

Качественно принцип Ферма можно объяснить следующим образом. Свет из точки I приходит в точку II всеми путями, которые только можно себе представить. Всеми мыслимыми путями свет приходит с разными фазами. Фаза определяется временем распространения. Если фазы совсем произвольны, то соответствующие разным фазам лучи гасят друг друга (деструктивная интерференция). Минимальному времени распространения соответствует минимальная фаза. Около минимума фазы изменение фазы квадратично (очень мало) при малой деформации светового пути. В таком случае много разных путей для света имеет примерно одинаковую фазу. Эти лучи в результате интерференции усиливают друг друга. Свет идет именно таким путем.

Факультативная вставка.

Далее приведем не очень строгое математическое доказательство принципа Ферма. Докажем равенство $\int_I^{II} n\,dl = \min$, то есть докажем, что оптическая длина пути между точками I и II вдоль реального луча меньше, чем вдоль любой другой мыслимой кривой, соединяющей точки I и II.

Обозначим: $d\vec{l}$ — перемещение вдоль реального луча, $d\vec{l}\,'$ — перемещение вдоль любой мыслимой кривой.

Тогда достаточно доказать, что $\int_I^{II} n\,dl \le \int_I^{II} n\,dl'$. В дальнейших формулах нужно внимательно следить за тем, где стоит dl, а где — dl'.

$$1 \ge \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) \qquad \Rightarrow$$

$\int_I^{II} n\,dl' \ge \int_I^{II} n \cdot \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) dl'$, где оба интеграла взяты вдоль любой мыслимой кривой.

В правой части неравенства заменим n на $\frac{\partial L}{\partial l}$ согласно нашему первому определению эйконала L, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль реального луча. Тогда

$$\int_I^{II} n\,dl' \ge \int_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l} \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) dl' = \int_I^{II} \left|\vec{\nabla} L\right| \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) dl' .$$

Учтем, что градиент эйконала направлен вдоль луча, что следует из уравнения эйконала в форме $\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$. Откуда

$$d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{\nabla} L \quad \Rightarrow \quad \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) = \cos\left(\vec{\nabla} L, d\vec{l}\,'\right) \quad \Rightarrow$$

$$\int_I^{II} n\,dl' \ge \int_I^{II} \left|\vec{\nabla} L\right| \cos\left(\vec{\nabla} L, d\vec{l}\,'\right) dl' = \int_I^{II} \left(\vec{\nabla} L\right)_{d\vec{l}\,'} dl' = \int_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l'} dl' = \int_I^{II} dL =$$
$$= L(II) - L(I).$$

Перейдем теперь в правой части неравенства от интеграла вдоль любой мыслимой кривой к интегралу вдоль реального луча.

$$\int_I^{II} n\,dl' \ge L(II) - L(I) = \int_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l} dl = \int_I^{II} n\,dl \qquad =>$$

$$\int_I^{II} n\,dl' \ge \int_I^{II} n\,dl.$$

Что и требовалось доказать.

На самом деле принцип Ферма выполняется в виде $\int_I^{II} dt = \min$, но не в виде $\int_I^{II} n\,dl = \min$. Так, например, в гауссовом пучке лучей даже в пустоте лучи распространяются не по кратчайшим прямым линиям, а по гиперболам. Сильнее всего лучи искривляются в шейке каустики, где пучок лучей имеет наименьший диаметр.

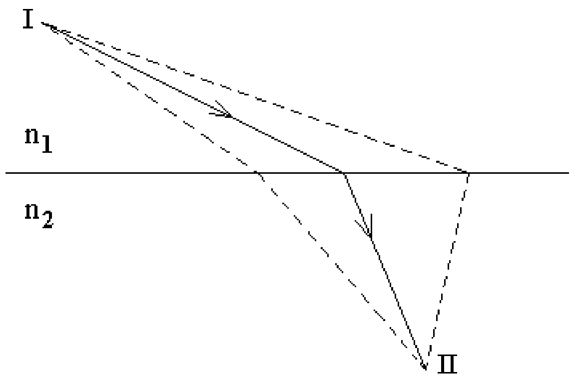
Где же допущена нестрогость в выводе принципа Ферма? Дело в том, что равенство $V_ф = \frac{c}{n}$ строго выполняется только для волны с одинаковой амплитудой в разных точках фронта, поэтому $dt = \frac{dl}{V_ф} \ne \frac{dl}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} n\,dl$. Например, раньше мы рассматривали гауссов пучок лучей в пустоте, и фазовая скорость в этом пучке $V_ф > c$.

Строже принцип Ферма выполняется, если точкой I является точечный источник света, но и здесь есть подвох в случае, если свет отражается от зеркала. В этом случае путь для света, который поворачивает, не доходя до зеркала, оказывается короче, чем путь с отражением от зеркала.

Кроме того при отражении от зеркала свет может пойти путем, который имеет максимальную оптическую длину вместо минимальной длины.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Из принципа Ферма можно получить закон преломления.



Закон Снеллиуса можно вывести из того, что оптическая длина пути от точки I до точки II для реального луча должна быть меньше, чем для любого другого, изображенного пунктиром.

То есть $\frac{n_1 h_1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{n_2 h_2}{\cos(\alpha_2)} = \min$ при условии $h_1 tg(\alpha_1) + h_2 tg(\alpha_2) = const$.

Подставим в первое равенство $\frac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{1 + tg^2(\alpha)}$ и получим

$$n_1 h_1 \sqrt{1 + tg^2(\alpha_1)} + n_2 h_2 \sqrt{1 + tg^2(\alpha_2)} = \min$$

Возьмем от этого равенства производную $\frac{d}{d(tg(\alpha_1))}$ и получим

$$n_1 h_1 \frac{tg(\alpha_1)}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha_1)}} + n_2 h_2 \frac{tg(\alpha_2)}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha_2)}} \cdot \frac{d(tg(\alpha_2))}{d(tg(\alpha_1))} = 0$$

Подставим $\frac{tg(\alpha_1)}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha_1)}} = \sin(\alpha_1)$, аналогично $\frac{tg(\alpha_2)}{\sqrt{1 + tg^2(\alpha_2)}} = \sin(\alpha_2)$, кроме того $\frac{d(tg(\alpha_2))}{d(tg(\alpha_1))} = -\frac{h_1}{h_2}$ из условия $h_1 tg(\alpha_1) + h_2 tg(\alpha_2) = const$ и получим

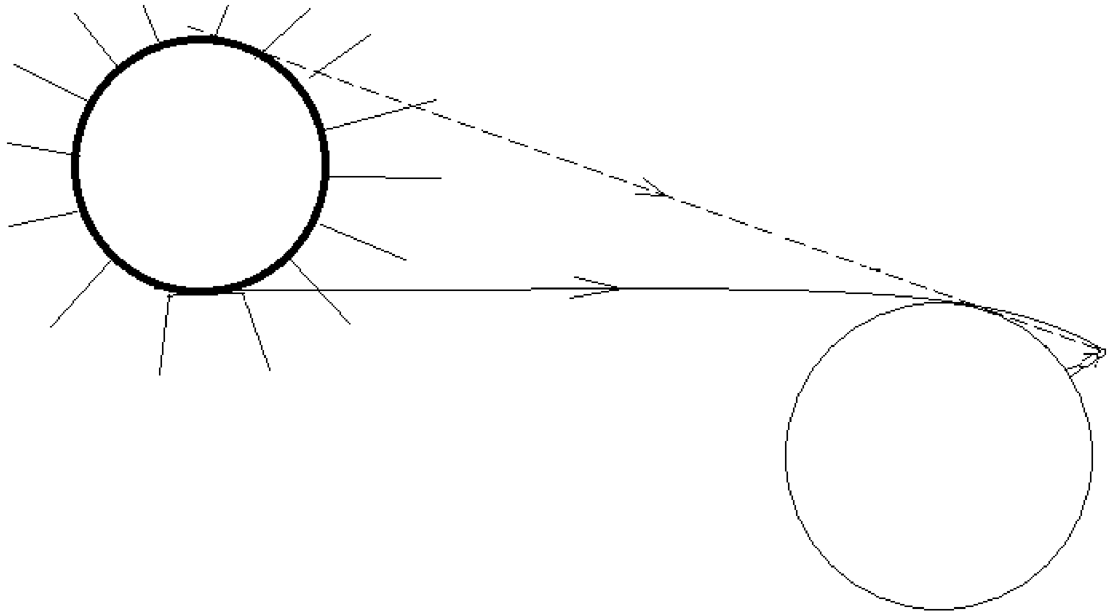
$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

Экзамен. Рефракция.

Понятие рефракции имеет три смысла.

1). В первом смысле рефракция — любое преломление света. Рефрактометр — прибор для измерения показателя преломления среды.

2). Во втором смысле рефракция в атмосфере или астрономическая рефракция — наблюдение Солнца из-под линии горизонта Земли.



Причина поворота солнечных лучей — уменьшение плотности атмосферы Земли с увеличением высоты над Землей. Дело в том, что с уменьшением плотности и соответственно концентрации молекул воздуха N уменьшается показатель преломления n, так как в разреженной среде $(n-1) \sim N$.

В неоднородной среде с изменяющимся от точки к точке показателем преломления свет поворачивает в оптически более плотную среду. В нашем случае свет поворачивает в сторону Земли.

3). В двух первых смыслах рефракция — это явление. В третьем смысле рефракция — это физическая величина.

$R \equiv \frac{V}{\nu} \cdot \frac{n^2-1}{n^2+2}$ — рефракция, молярная или молекулярная рефракция. Здесь V — объем вещества, ν — число молей, $\frac{V}{\nu}$ — объем одного моля, n — показатель преломления среды.

Часто вместо молярной рефракции рассматривают удельную рефракцию $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{n^2-1}{n^2+2}$, где ρ — плотность среды. Здесь по сравнению с молярной рефракцией объем одного моля $\frac{V}{\nu}$ заменен объемом единицы массы $\frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}$.

Молярная рефракция представляет интерес для анализа формулы Лоренц — Лорентца:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0},$$

В системе СГС Гаусса: $\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4}{3}\pi N\alpha$.

где N — концентрация молекул, α — поляризуемость одной молекулы или коэффициент пропорциональности между наведенным дипольным моментом молекулы $\vec{p}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E},$$

n — показатель преломления среды.

Формула Лоренц — Лорентца для оптических полей доказывается аналогично формуле Клаузиуса — Моссотти в электростатике:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}.$$

Дело в том, что размер атома в тысячу раз меньше длины волны света, поэтому световое поле можно считать медленным полем для атома.

В оптике $n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$ => $\varepsilon \approx n^2$.

Из определения рефракции следует $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = R\frac{\nu}{V}$. Тогда с учетом формулы Лоренц — Лорентца получаем:

$$R\frac{\nu}{V} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{NV}{\nu}\frac{\alpha}{3\varepsilon_0},$$

где $\frac{NV}{\nu} = N_A$ — число Авогадро или число молекул в одном моле. Тогда

$$R = N_A\frac{\alpha}{3\varepsilon_0}.$$

То есть молярная рефракция должна сохраняться независимо от концентрации вещества в случае выполнения формулы Лоренц — Лорентца. Формула Лоренц — Лорентца выполнятся не совсем точно. Отклонение от формулы Лоренц — Лорентца является предметом современных научных исследований. Отклонение от формулы Лоренц — Лорентца удобно рассматривать, как изменение молярной рефракции R.

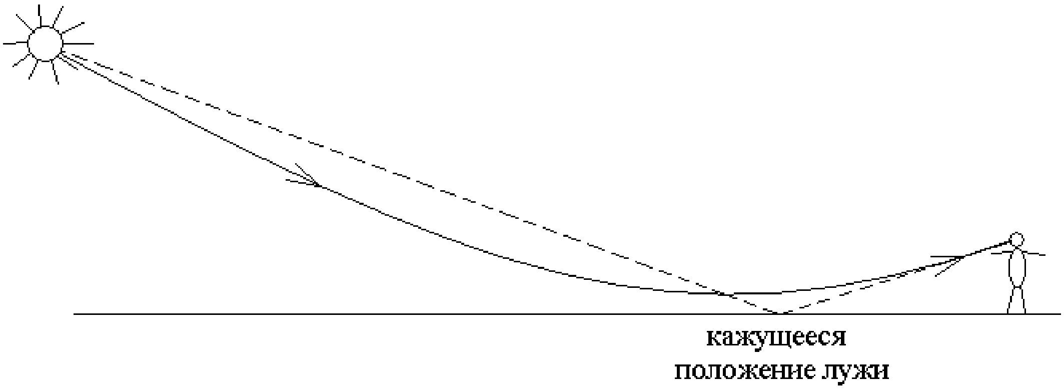
Экзамен. Миражи.

Если смотреть летом вдоль раскаленного шоссе, то где-то далеко асфальт кажется мокрым, покрытым лужами. Если у автомобиля включены фары, то в отражении как бы от лужи видна еще одна пара включенных фар.

Причина этой иллюзии в том, что у разогретого асфальта выше температура воздуха T, а давление воздуха p одинаковое: $p = Nk_Б T$, следовательно, у разогретого асфальта меньше концентрация молекул воздуха N.

Меньшая концентрация молекул означает, меньшее значение показателя преломления, так как при небольшой плотности из формулы Лоренц-Лорентца следует $(n-1) \sim N$.

Свет поворачивает в оптически более плотную среду:



При скользящем падении света свет поворачивает у поверхности асфальта, как бы отражаясь от лужи. В этой луже, которой на самом деле нет, видны отражения неба, солнца, деревьев или фар автомобиля.

В раскаленной пустыне свет поворачивает не только у раскаленного песка, но и в высоких разреженных слоях атмосферы. Эти отражения порождают миражи. Отражения позволяют видеть оазис из-под линии горизонта и видеть водные поверхности, которых на самом деле нет.