

Спектр света.

Спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Спектр — это зависимость интенсивности света от координаты в этой плоскости. Спектр света пропорционален квадрату модуля Фурье образа электрического поля.

Экзамен. Диапазоны электромагнитных волн и источники излучения.

Факультативная вставка.

Для волны любой природы произведение длины волны на частоту равно фазовой скорости волны: $\lambda\nu = c$. С 1983 года значение скорости света в вакууме постулируется: $c \equiv 299792458$ м/с, что позволяет иметь единый эталон для длины и времени. До этого момента длину измеряли, сравнивая длину волны эталонной красной линии криптона с длиной измеряемого предмета с помощью интерферометра Майкельсона. Частоту измеряли, сравнивая с частотой цезиевого эталона частоты ≈ 9 ГГц. К 1983 году с помощью приемников излучения типа "кошачий ус" удалось провести сравнение частот лазеров, для которых частоты отличаются в несколько раз, например в случае, когда $\nu_1 - 3\nu_2$ является достаточно низкой частотой для регистрации электронной схемой частотомера. В результате удалось сравнить частоту He-Ne лазера $\lambda \approx 3.39$ мкм и частоту цезиевого эталона частоты примерно 9 ГГц. Независимое точное измерение частоты и длины волны генерации лазеров позволило перейти к единому эталону длины и частоты.

Конец факультативной вставки.

Электромагнитные волны делятся на диапазоны в зависимости от длины волны λ или от частоты ν .

Разделение на диапазоны приблизительно определяется типами источников излучения. Для любых источников электромагнитное излучение возникает только при ускоренном движении заряженных частиц.

Рассмотрим диапазоны, начиная с самых больших длин волн.

Низкие или промышленные частоты.

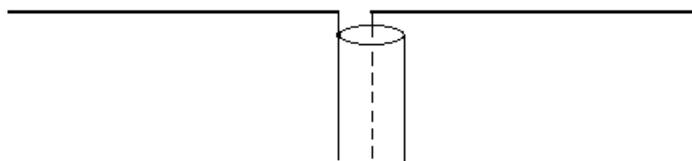
$$\lambda > 3 \text{ км} \qquad \nu < 100 \text{ кГц}$$

Источники — паразитное излучение промышленных электроустановок: электродвигатели, электрогенераторы.

Радиоволны.

$$1 \text{ м} < \lambda < 3 \text{ км} \qquad 100 \text{ кГц} < \nu < 300 \text{ МГц}$$

Источники — штыревые антенны.



Простейшая антенна — два штыря и коаксиальный кабель, по которому сигнал подводится к передающей антенне.

Микроволновой или СВЧ диапазон.

СВЧ — сверхвысокие частоты.

$$1\text{мм} < \lambda < 1\text{м} \qquad 300\text{МГц} < \nu < 300\text{ГГц}$$

Источники — магнетроны и клистроны (объемные полые металлические резонаторы).

Передача от резонатора к антенне в сантиметровом и миллиметровом диапазоне производится по полую металлическому волноводу. Антенна со сферическим отражателем — спутниковая тарелка. Телевещание, радиолокация.

Инфракрасный свет.

ИК излучение.

$$0.7\text{мм} < \lambda < 1\text{мм}.$$

Частоту в этом диапазоне часто измеряют в обратных сантиметрах: $1\text{см}^{-1} \approx 30\text{ГГц}$. Частота 1см^{-1} по определению соответствует излучению с длиной волны 1 см.

$$10\text{см}^{-1} = 300\text{ГГц} < \nu < 14000\text{см}^{-1} \approx 430\text{ТГц}.$$

Терагерцовый диапазон — диапазон частот около 1 ТГц.

Источники — излучение молекул при возбуждении колебания или вращения молекулы — вращательные и колебательные спектры молекул. Излучение нагретых тел.

Видимый свет.

$$0.4\text{мм} < \lambda < 0.7\text{мм}.$$

Коротковолновая граница — фиолетовый свет, длинноволновая граница — красный свет.

Вместо частот обычно говорят об энергии кванта света $E = h\nu$. Энергию обычно выражают в электрон-вольтах — это энергия, которую приобретает электрон, пролетая напряжение в 1 Вольт. Энергия кванта света $1\text{эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$ соответствует частоте света $\nu = 242\text{ТГц}$ и длине волны $\lambda = 1.24\text{мм}$.

Диапазон энергий видимого света:

$$1.8\text{эВ} < h\nu < 3.1\text{эВ}.$$

Источники — излучение атомов и молекул при возбуждении их электронных оболочек.

Ультрафиолетовый свет.

$$10\text{нм} < \lambda < 400\text{нм} \qquad 3.1\text{эВ} < h\nu < 125\text{эВ}$$

Источники — излучение атомов и ионов при возбуждении их электронных оболочек, рекомбинация положительных ионов и электронов.

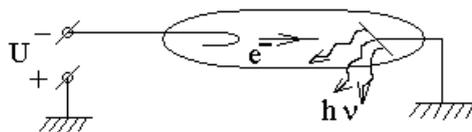
Рентген.

$$0.01\text{нм} < \lambda < 10\text{нм} \qquad 125\text{эВ} < h\nu < 125\text{кэВ}$$

Источники — излучение атома после выбивания электрона внутренних электронных оболочек и тормозное излучение в металле электронов, ускоренных электрическим напряжением — рентгеновская трубка.

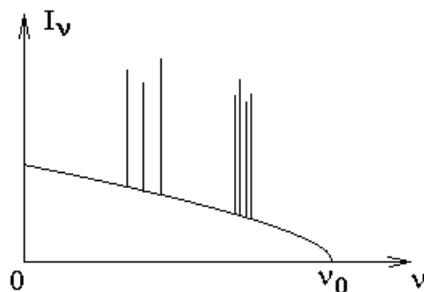
Рентгеновская трубка — это откачанная стеклянная трубка с двумя металлическими электродами, между которыми приложено напряжение в

десятки киловольт. Из нагретого электрическим током катода (накальный катод) вылетают электроны в результате термоэлектронной эмиссии.



Электроны ускоряются электрическим полем от катода к аноду. При ударе об анод электроны теряют энергию, часть которой переходит в энергию рентгеновского фотона.

Спектр образующегося излучения имеет следующий вид.

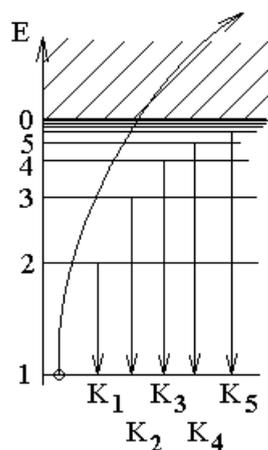


Спектр имеет сплошную и линейчатую составляющие.

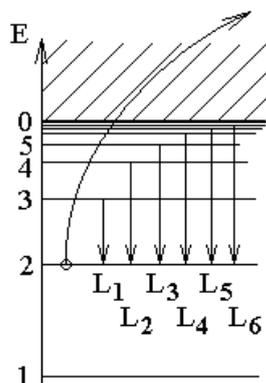
Сплошной спектр — это тормозное излучение электронов, останавливающихся внутри материала анода, так как ускоренное движение зарядов всегда сопровождается излучением. Максимальная энергия рентгеновского фотона равна энергии налетающего электрона $h\nu_0 = eU$.

Линейчатый спектр определяется уровнями энергии внутренних электронов атомов анода. Налетающий электрон имеет большую энергию и может выбить не только внешний электрон атома, но и один из электронов внутренних электронных оболочек атома. Если выбит электрон одной из внутренних оболочек атома, то электрон с любого из высележащих уровней энергии может перейти на освободившейся уровень. Это сопровождается излучением рентгеновского кванта $\Delta E = h\nu$.

Если выбит электрон с уровня энергии самой нижней электронной оболочки (на ней 2 электрона), то возможные переходы электронов с высележащих уровней энергии на освободившейся уровень образуют так называемую K-серию рентгеновских спектральных линий линейчатого спектра K_1, K_2, K_3, \dots :



Если электрон выбит с уровня энергии второй оболочки (на второй заполненной оболочке находится 8 электронов), то возможные переходы электронов с вышележащих уровней энергии образуют *L*-серию рентгеновских линий:



Аналогично, если электрон выбит с третьей оболочки, то в спектре появятся линии *M*-серии, т. д.

Гамма излучение.

$$\lambda < 0.01 \text{ нм}$$

$$h\nu > 125 \text{ кэВ}$$

Источники — излучение возбужденных атомных ядер, тормозное излучение в ускорителях элементарных частиц при взаимодействии ускоренной частицы с мишенью, излучение при взаимных превращениях элементарных частиц, космическое излучение.

Для сравнения энергия покоя электрона: 511 кэВ. Так при аннигиляции электрона и позитрона происходит излучение двух γ квантов с соответствующей энергией.

Экзамен. Разложение светового поля по частотам.

Рассмотрим вещественную напряженность светового поля $\vec{E}(t)$ в одной пространственной точке.

Преобразование Фурье позволяет представлять световое поле $\vec{E}(t)$ в одной точке пространства, как суперпозицию гармонических колебаний разных частот.

Рассмотрим прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \cdot d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt \end{array} \right. , \text{ здесь коэффициент } \frac{1}{2\pi} \text{ может быть}$$

разделен на два сомножителя в интегралах произвольным образом.

Вещественность зависимости $\vec{E}(t)$ накладывает некоторые ограничения на вид ее Фурье образа $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$. Рассмотрим $\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$:

$$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}(t) e^{i\omega t} dt)^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}(t))^* (e^{i\omega t})^* (dt)^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega t} dt = \tilde{\vec{E}}_0(-\omega)$$

Откуда:

$$\tilde{\vec{E}}_0(-\omega) = \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega).$$

То есть, Фурье образ поля $\vec{E}(t)$ на отрицательных частотах может быть выражен, как комплексно сопряженная величина к Фурье образу на положительных частотах. Тогда Фурье интеграл по всем частотам можно выразить через Фурье интеграл только по положительным частотам

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega.$$

для этого в первом интеграле заменим ω на $(-\omega)$ и воспользуемся равенством $\tilde{\vec{E}}_0(-\omega) = \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$, тогда получим

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega.$$

Заметим, что первое слагаемое является комплексно сопряженным ко второму, тогда

$$\vec{E}(t) = \left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right)^* + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right),$$

так как при сложении комплексно сопряженных величин вещественная часть удваивается, а мнимая сокращается. Тогда

$$\vec{E}(t) = \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) \quad \text{— разложение светового поля по}$$

положительным частотам.

В результате получаем разложение вещественного светового поля, как по частотам обоих знаков, так и по положительным частотам

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} dt \end{aligned} \right. .$$

Будем называть комплексным световым полем $\tilde{\vec{E}}(t)$ выражение:

$$\tilde{\vec{E}}(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega .$$

Тогда Фурье образ $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ показывает, сколько в комплексном поле $\tilde{\vec{E}}(t)$ содержится сигнала с частотой ω .

$\vec{E}(t) = \operatorname{Re}(\tilde{\vec{E}}(t))$ — связь вещественного $\vec{E}(t)$ и комплексного $\tilde{\vec{E}}(t)$ световых полей.

Экзамен. Ряды Фурье для светового поля.

Мы не знаем величину электрического поля на бесконечном интервале времени.

Допустим, нам известно поле $\vec{E}(t)$ на промежутке времени T .

В таком случае за пределами известного интервала времени T либо считают поле $\vec{E}(t)$ равным нулю, либо считают, что поле периодически повторяется с периодом T . Пусть поле $\vec{E}(t)$ — периодическая функция времени. Периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье по кратным частотам.

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t}, \quad \text{где } \omega_m = m \frac{2\pi}{T}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь амплитуды ряда Фурье находятся по формулам:

$$\tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T} \int_0^T \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_m t} dt .$$

Рассмотрим выражение комплексно сопряженное фурье-амплитуде:

$$\tilde{\vec{E}}_m^* = \left(\frac{2}{T} \int_0^T \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_m t} dt \right)^* = \frac{2}{T} \int_0^T \vec{E}(t) \cdot e^{-i\omega_m t} dt = \tilde{\vec{E}}_{-m}$$

Аналогично интегралу Фурье из вещественности поля $\vec{E}(t)$ следует, что амплитуды разложения по отрицательным частотам должны быть комплексно сопряженными амплитудам на положительных частотах

$$\tilde{E}_{-m} = \tilde{E}_m^*$$

Объединяя парами комплексно сопряженные слагаемые Фурье разложения поля $\vec{E}(t)$, можно из разложения поля по частотам обоих знаков получить разложение по положительным частотам:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_m \cdot e^{-i\omega_m t} = \frac{\vec{E}_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{+\infty} \tilde{E}_m \cdot e^{-i\omega_m t}.$$

Окончательно для периодической функции $\vec{E}(t)$ получаем представление в виде ряда Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_m \cdot e^{-i\omega_m t} = \frac{\vec{E}_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{+\infty} \tilde{E}_m \cdot e^{-i\omega_m t} \\ \tilde{E}_m = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_m t} dt \end{array} \right.$$

Экзамен. Спектр света. Разные определения спектра света. Спектр экспоненциально затухающего светового пучка.

Математики часто под спектром понимают Фурье образ $\tilde{E}_0(\omega)$ временной зависимости $\vec{E}(t)$. В физике исторически спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Эти изображения представляют собой спектр света, падающего на входную щель спектрометра. Вопрос состоит в том, как количественно описать этот спектр света. Есть несколько подходов к этому вопросу.

В любом случае в физике спектр связан с зависимостью от частоты либо энергии света, либо интенсивности. Энергия пропорциональна интенсивности, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Фурье образ светового поля как раз и играет роль комплексной амплитуды света на определенной частоте света, поэтому спектр света в физике пропорционален квадрату модуля Фурье образа светового поля. Коэффициент пропорциональности в разных случаях вводится по-разному, и обычно вообще не обсуждается, как величина несущественная. Световое поле вещественно, следовательно, квадрат модуля Фурье образа на отрицательных частотах равен квадрату модуля на соответствующих положительных частотах. Поэтому в физике под спектром понимают зависимость квадрата модуля Фурье образа только от положительных частот.

В соответствии с этим мы будем называть спектром света величину пропорциональную квадрату модуля Фурье образа светового поля, как функцию положительной частоты света.

При рассмотрении Фурье образа есть два варианта — интеграл Фурье и ряд Фурье.

Если рассматривается спектр короткого светового импульса G_ω , то берут интеграл Фурье. В качестве примера рассмотрим спектр светового цуга, излучаемого одним атомом при переходе атома из возбужденного в невозбужденное состояние. Амплитуда излучения атома экспоненциально затухает во времени, поэтому световое поле атома в фиксированной точке наблюдения имеет вид:

$$E(t) = E_0 e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) \text{ при } t > 0$$

и световое поле отсутствует при $t < 0$.

Вычислим Фурье образ этого светового поля:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} E_0 e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} E_0 e^{-\Gamma t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(e^{-(\Gamma - i(\omega + \omega_0))t} + e^{-(\Gamma - i(\omega - \omega_0))t} \right) dt = \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \left(\frac{1}{\Gamma - i(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{\Gamma - i(\omega - \omega_0)} \right). \end{aligned}$$

Если $\omega \approx \omega_0$, то с учетом $\omega_0 \gg \Gamma$, второе слагаемое оказывается гораздо больше первого

$$\left| \frac{1}{\Gamma - i(\omega + \omega_0)} \right| \ll \left| \frac{1}{\Gamma - i(\omega - \omega_0)} \right|,$$

так как знаменатель второго слагаемого — величина порядка Γ , а знаменатель первого слагаемого — величина порядка $2\omega_0$. Фурье образ представляет интерес, когда он достаточно велик. Тогда интерес представляет область частот $\omega \approx \omega_0$, и Фурье образ примерно равен

$$\tilde{E}_0(\omega) \approx \frac{E_0}{2\pi(\Gamma - i(\omega - \omega_0))}.$$

Спектр света G_ω пропорционален квадрату модуля Фурье образа:

$$|\tilde{E}_0(\omega)|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\Gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2 \Gamma^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2 \Gamma^2} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right),$$

где $G_\omega \sim \mathcal{L}(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$ — так называемый лоренцевский контур спектральной

линии излучения одиночного атома, где $x \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}$ — безразмерная отстройка частоты ω от центра линии излучения ω_0 , Γ — полуширина на полувысоте спектрального контура.

Факультативная вставка.

Если все-таки вводить определенный коэффициент пропорциональности между спектром G_ω и квадратом модуля Фурье образа $|\tilde{E}_0(\omega)|^2$, то это можно сделать следующим образом. Пусть $G = \frac{dW}{dS}$ — энергия электромагнитного поля, которая падает на единичную площадку перпендикулярную свету. Тогда

$$G = \int_0^{+\infty} G_\omega d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt, \quad (1)$$

где $G_\omega \equiv \frac{dG}{d\omega}$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку в единичном интервале частот; $I(t)$ — интенсивность света или энергия, которая падает на единичную площадку в единицу времени.

Интенсивность света связана с его амплитудой $I = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} E_0^2(t)$.

В системе СГС Гаусса $I(t) = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2(t)$.

Если теперь для светового пуга взять $E_0(t) = E_0 e^{-\Gamma t}$ при $t > 0$, в равенство (1)

подставить $G_\omega = \alpha |\tilde{E}_0(\omega)|^2$ с неизвестным коэффициентом α и подставить

$|\tilde{E}_0(\omega)|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2 \Gamma^2} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)$, то можно найти величину коэффициента α . В

результате окажется, что

$$G_\omega = 2\pi \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} |\tilde{E}_0(\omega)|^2$$

В системе СГС Гаусса $G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu} |\tilde{E}_0(\omega)|^2$.

Конец факультативной вставки.

Если вместо светового импульса нужно анализировать изменение спектра света со временем, то рассматривают ряд Фурье. Для вычисления Фурье образа напряженности нужно рассматривать не один момент времени, а некоторый промежуток. Этот промежуток времени T усреднения спектра выбирают произвольно. Спектр будет существенно зависеть от этого выбора.

Сначала рассматривают первый промежуток времени T и на этом промежутке определяют спектр. С этой целью реальную зависимость светового поля от времени заменяют периодической зависимостью с периодом T . На этом периоде световое поле полагается равным реальному световому полю на первом промежутке времени T . Для полученного таким образом периодического светового поля находят разложение в ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов этого разложения представляют собой гистограмму спектра света на первом промежутке времени T . Затем рассматривают второй промежуток времени T с реальной зависимостью светового поля от времени.

Чтобы найти спектр для этого второго промежутка времени T , реальную зависимость светового поля от времени опять заменяют на периодическую зависимость с периодом T . Только теперь на этом периоде световое поле совпадает с реальным световым полем на втором промежутке времени T . Опять вычисляют ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов ряда Фурье — гистограмма спектра на втором промежутке времени T . И так далее. Получается возможность рассмотрения зависимости спектра от времени.

Если квадрат модуля фурье-амплитуды умножить на некоторый коэффициент:

$$I_m = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} |\tilde{E}_m|^2$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } I_m = \frac{cn}{8\pi\mu} |\tilde{E}_m|^2$$

то I_m окажется интенсивностью света на частоте $\omega_m = m \frac{2\pi}{T}$. Можно доказать,

что общая интенсивность света $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$. Набор интенсивностей I_m удобно

называть и называют спектром света. В этом определении спектр света — это некоторая гистограмма.

Факультативная вставка.

Покажем, что $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$.

Выразим интенсивность света через среднее значение квадрата напряженности, а напряженность подставим в виде ряда Фурье.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\varepsilon_0 c n}{\mu} \left\langle E^2(t) \right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 c n}{\mu} \left\langle (\vec{E}(t), \vec{E}(t)) \right\rangle_t = \\ &= \frac{\varepsilon_0 c n}{\mu} \left\langle \left(\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_m e^{-i\omega_m t}, \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_k e^{-i\omega_k t} \right) \right\rangle_t \end{aligned}$$

Вынесем комплексные экспоненты за знак скалярного произведения и получим

$$I = \frac{\varepsilon_0 c n}{4\mu} \sum_{m,k=-\infty}^{+\infty} \left\langle e^{-i\omega_m t} \cdot (e^{-i\omega_k t})^* \right\rangle_t \cdot (\tilde{E}_m, \tilde{E}_k) = \frac{\varepsilon_0 c n}{4\mu} \sum_{m,k=-\infty}^{+\infty} \left\langle e^{i(\omega_k - \omega_m)t} \right\rangle_t \cdot (\tilde{E}_m, \tilde{E}_k)$$

Если частоты ω_k и ω_m не совпадают, то $\left\langle e^{i(\omega_k - \omega_m)t} \right\rangle_t = 0$, так как $e^{i(\omega_k - \omega_m)t}$ — комплексное число единичной длины, которое вращается на комплексной плоскости с угловой скоростью $\omega_k - \omega_m$. Если же частоты совпадают $\omega_k = \omega_m$, то $\left\langle e^{i(\omega_k - \omega_m)t} \right\rangle_t = 1$. Тогда

$\left\langle e^{i(\omega_k - \omega_m)t} \right\rangle_t = \delta_{km}$ — дельта символ Кронекера, и

$$I = \frac{\varepsilon_0 c n}{4\mu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{E}_m, \tilde{E}_m \right) = \frac{\varepsilon_0 c n}{4\mu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \tilde{E}_m \right|^2.$$

Учтем, что $\left| \tilde{E}_{-m} \right| = \left| \tilde{E}_m \right|$, так как $\tilde{E}_{-m} = \tilde{E}_m^*$ и получим

$$I = \frac{\varepsilon_0 c n}{4\mu} E_0^2 + \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \tilde{E}_m \right|^2.$$

Сравним это выражение с выражением интенсивности через вещественную амплитуду светового поля E_0 :

$$I = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} E_0^2.$$

Вещественная амплитуда равна модулю комплексной амплитуды, тогда

$$I_m = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} \left| \tilde{E}_m \right|^2 \text{ — интенсивность светового поля на частоте } \omega_m = m \frac{2\pi}{T}.$$

Введем для интенсивности на нулевой частоте определение:

$$I_0 \equiv \frac{\varepsilon_0 c n}{4\mu} E_0^2, \text{ тогда интенсивность света } I = \frac{\varepsilon_0 c n}{4\mu} E_0^2 + \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \tilde{E}_m \right|^2 \text{ можно}$$

выразить, как сумму интенсивностей по положительным частотам:

$$I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m.$$

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Особняком при рассмотрении спектра стоит излучение абсолютно черного тела (формула Планка). Здесь под спектром обычно понимают спектральную плотность объемной плотности энергии электромагнитного поля

$$w_\nu(T) \equiv \frac{dw}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}.$$

Конец факультативной вставки.