Факультативно. Теорема Парсеваля.

Если рассмотреть два выражения для поверхностной плотности энергии светового поля:

$$G=\int\limits_0^{+\infty} G_\omega\, d\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt\,,$$

где $G_\omega = 2\pi\dfrac{\varepsilon_0 c n}{2\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку перпендикулярную направлению света в единичном интервале циклических частот, $I=\dfrac{\varepsilon_0 c n}{\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t$ — интенсивность света. То из этого равенства можно получить теорему Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 d\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\, dt\,,$$

если вместо нашего определения $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt$ положить, что

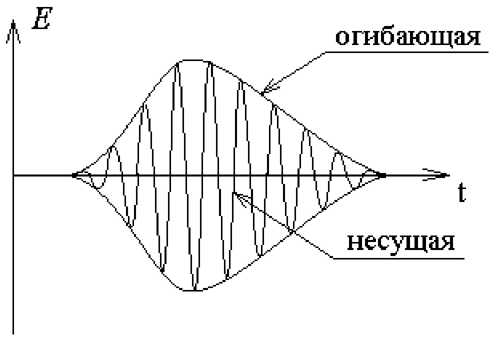
$$\tilde{\vec{E}}_0(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt\,.$$

Заметим, что в математике теорема Парсеваля доказана для более общего случая унитарного преобразования. Преобразование Фурье — частный случай унитарного преобразования.

Экзамен. Спектр огибающей амплитудно-модулированного светового импульса и спектр самого импульса.

Рассмотрим световое поле в одной пространственной точке. Пусть для простоты свет линейно поляризован. Тогда можно не следить за направлением светового поля $\vec{E}(t)$, а рассматривать только его величину.

Рассмотрим световой импульс.



Огибающая светового импульса — медленно меняющаяся амплитуда поля.

Несущая — синусоида с частотой заполнения огибающей. Косинусоида — это та же синусоида только со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$, поэтому косинусоиды для благозвучия тоже будем называть синусоидами.

Световой импульс — произведение двух функций: медленной огибающей и синусоиды несущей частоты.

Огибающую можно представить, как сумму нескольких синусоид, то есть в виде Фурье разложения.

Рассмотрим простейший вариант огибающей, которая состоит из одной синусоиды с частотой Ω_0:

$A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$.

Пусть несущая имеет оптическую частоту ω_0:

$\cos(\omega_0 t)$, где для медленной огибающей $\Omega_0 << \omega_0$. Тогда

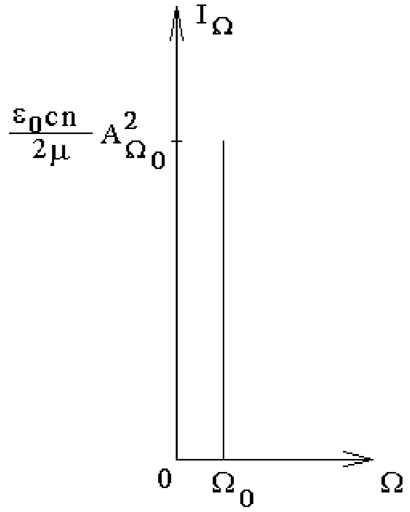
$$E(t) = A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t) = \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0+\Omega_0)t) + \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0-\Omega_0)t).$$

Оказалось, что свет состоит из синусоид двух частот: $(\omega_0+\Omega_0)$ и $(\omega_0-\Omega_0)$. Амплитуда каждой из них $\frac{A_{\Omega_0}}{2}$ вдвое меньше амплитуды A_{Ω_0} огибающей $A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$, а интенсивность вчетверо меньше, как квадрат амплитуды: $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}E_0^2$.

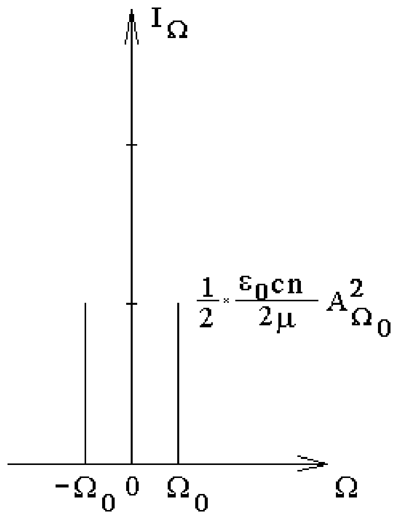
Рассмотрим три спектра. Для простоты будем считать, что частоты Ω_0 и ω_0 кратны одной и той же малой частоте ω_1. Тогда световое поле является периодической функцией с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Периодическое световое поле можно разложить в ряд Фурье. Будем под спектром света понимать совокупность интенсивностей фурье-компонент I_m. Для светового поля отличными от нуля окажутся интенсивности только двух компонент ряда Фурье с положительными частотами $\omega_0-\Omega_0$ и $\omega_0+\Omega_0$. В спектре огибающей окажется отличной от нуля интенсивность только одной компоненты с положительной частотой Ω_0. Амплитуды фурье-компонент будут совпадать с амплитудами соответствующих синусоид, а интенсивности компонент будут связаны с амплитудами обычными соотношениями вида $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}A^2$.

Рассмотрим гистограммы трех спектров.

1). Спектр огибающей, который в рассматриваемом случае состоит из одной спектральной линии.

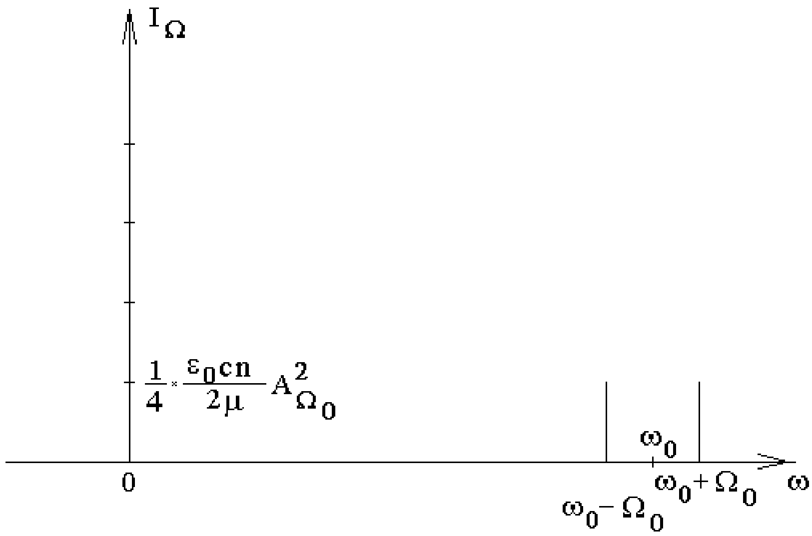


2). Спектр огибающей в частотах обоих знаков.



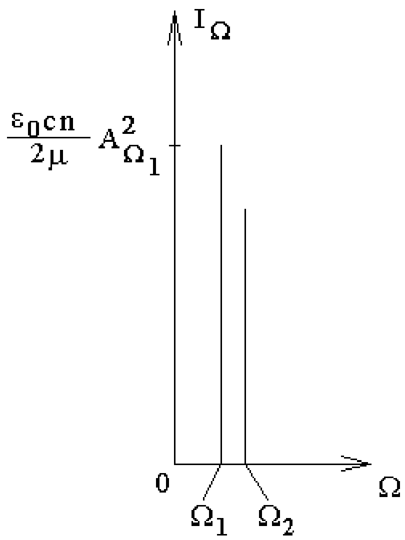
При этом чтобы суммарная интенсивность осталась без изменения, и интенсивность была бы равна сумме интенсивностей, нужно считать, что на каждую из этих двух частот приходится половина всей интенсивности.

3). Спектр светового импульса, который представляет собой спектр огибающей обоих знаков, сдвинутый на частоту несущей ω_0.

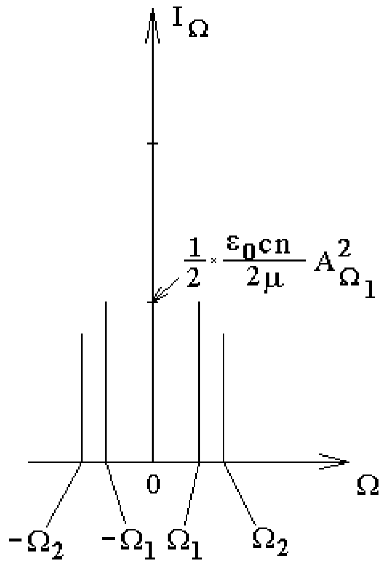


Интенсивности линий спектра становятся еще вдвое меньше. Причина еще одного коэффициента $\frac{1}{2}$ вызвана тем, что световой импульс в сравнении с огибающей имеет сомножитель $\cos(\omega_0 t)$, а интенсивность при этом имеет сомножитель $\left\langle \cos^2(\omega_0 t) \right\rangle_t = \frac{1}{2}$.

Обсудим теперь огибающую светового импульса, в спектре которой содержится несколько частот, например две.

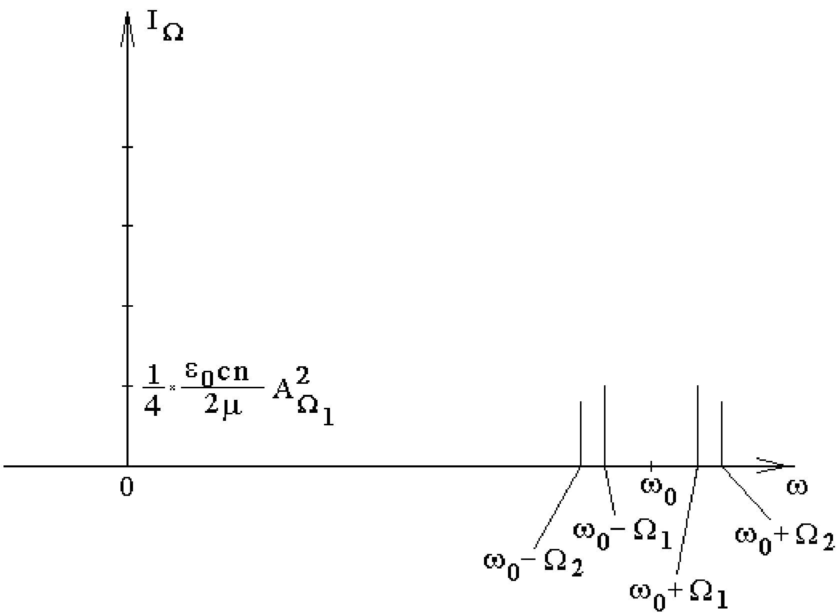


Спектр огибающей в частотах обоих знаков будет иметь вдвое меньшие интенсивности.



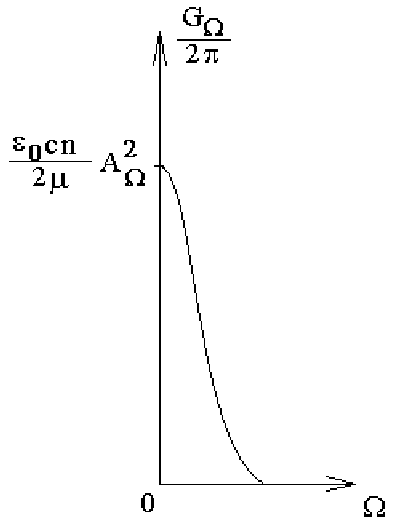
.

Спектр светового импульса будет подобен спектру огибающей, но еще вдвое ниже и сдвинут на частоту несущей.



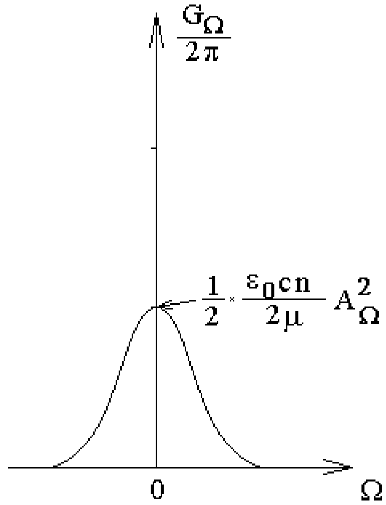
.

Обычно огибающую светового импульса можно разложить только в непрерывный спектр:

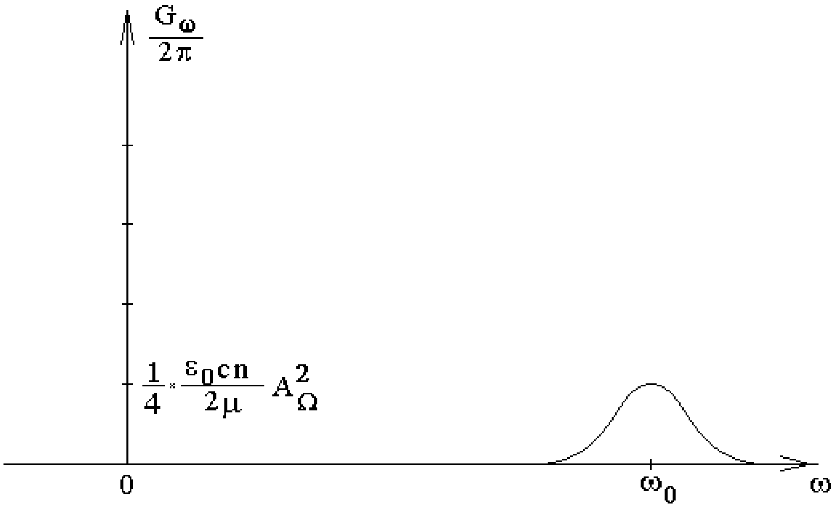


Здесь $G_\omega = 2\pi \dfrac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} \left| \tilde{E}_0(\omega) \right|^2$ — спектр света или спектральная плотность поверхностной плотности энергии, $\left| \tilde{E}_0(\Omega) \right| = A_\Omega$ — модуль фурье-образа огибающей.

Спектру положительных частот можно сопоставить уполовиненный по высоте спектр частот обоих знаков.



При этом спектр светового импульса по форме совпадает со спектром огибающей, но оказывается еще вдвое ниже и сдвинут по оси абсцисс на величину равную несущей частоте.



Для краткости говорят, что спектр светового импульса — это спектр огибающей импульса, сдвинутый на частоту несущей. То, что спектр огибающей рассматривается в частотах обоих знаков, и то, что сдвинутый спектр вдвое уменьшается по высоте, подразумевается, но не озвучивается.

Экзамен. Соотношение неопределенности частоты и времени (без доказательства).

Опираясь только на свойства преобразования Фурье можно доказать, что спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega$ и его длительность Δt связаны приблизительным соотношением

$$\Delta\omega\Delta t > 1.$$

Обычно под спектральной шириной импульса понимают ширину его спектрального контура G_ω на половине высоты (на половине максимального значения G_ω). Аналогично под длительностью импульса можно понимать ширину контура $I(t)$ на половине его высоты.

Это неравенство означает, что короткий световой импульс обязан иметь широкий спектр, а почти монохроматическое световое поле не может быть кратковременным.

Если короткий световой импульс пропустить через узкополосный светофильтр, спектральная ширина пропускания которого $\Delta\omega$ мала, то свет на выходе светофильтра будет иметь малую амплитуду и большую длительность, Δt — велико. Если монохроматический свет с постоянной амплитудой пропустить через затвор, который открывается на короткий промежуток времени, то после затвора спектр света становится широким.

Факультативная вставка.

Приблизительное неравенство $\Delta\omega\Delta t > 1$ можно заменить неравенством с точной границей

$$\Delta\omega\Delta t \ge \frac{1}{2}.$$

Для точного неравенства $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$ нужно несколько по-другому определить величины $\Delta\omega$ и Δt. Заметим, что для того чтобы величина $\frac{1}{2}$ была точной границей неравенства необходимо, чтобы у светового импульса была несущая частота. То есть спектр частот импульса должен быть сдвинут далеко от нулевой частоты.

Пусть $\Delta\omega = \sqrt{\left\langle \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 \right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение частоты ω в распределении светового импульса по частотам от средней частоты $\langle\omega\rangle$ светового импульса.

Аналогично, $\Delta t = \sqrt{\left\langle \left(t - \langle t\rangle\right)^2 \right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение времени t прохождения частей импульса через фиксированную точку пространства от среднего времени $\langle t\rangle$ или времени прохождения центра тяжести импульса.

$$\Delta\omega = \sqrt{\left\langle \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \omega^2 - 2\omega\langle\omega\rangle + \langle\omega\rangle^2 \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{\left\langle \omega^2 \right\rangle - 2\langle\omega\rangle\langle\omega\rangle + \langle\omega\rangle^2} = \sqrt{\left\langle \omega^2 \right\rangle - \langle\omega\rangle^2}$$

Аналогично:

$$\Delta t = \sqrt{\left\langle \left(t - \langle t\rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle - \langle t\rangle^2}\ .$$

Средняя частота светового импульса — это частота, усредненная с весом пропорциональным спектральной плотности поверхностной плотности энергии светового импульса $G_\omega = 2\pi \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, где $\tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(t)\cdot e^{i\omega t} dt$ — фурье-образ светового поля $E(t)$. При таком усреднении величина $\frac{G_\omega d\omega}{G}$ играет роль вероятности того, что частота лежит в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Сумма этих вероятностей равна единице, так как $G = \int\limits_0^{+\infty} G_\omega\, d\omega$. Среднее значение любой величины равно сумме или интегралу по всем вариантам состояний от произведения усредняемой величины на вероятность состояния. Тогда

$$\langle\omega\rangle=\int\limits_0^{+\infty}\omega\,\frac{G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty}G_\omega d\omega}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат частоты:

$$\left\langle\omega^2\right\rangle=\int\limits_0^{+\infty}\omega^2\,\frac{G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega^2 G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega^2 G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty}G_\omega d\omega}.$$

Через эти два средних значения и выражается спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega=\sqrt{\left\langle\omega^2\right\rangle-\langle\omega\rangle^2}$.

При вычислении среднего времени прохода светового импульса через фиксированную точку пространства нужно время усреднить с весом пропорциональным мгновенному значению интенсивности света $I(t)$ внутри светового импульса. Роль вероятности того, что время (импульса) лежит в интервале от t до $t+dt$ играет величина $\dfrac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t')\,dt'}$.

Тогда

$$\langle t\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\,\frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t')\,dt'}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\,I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t)\,dt}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат времени:

$$\left\langle t^2\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\,\frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t')\,dt'}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\,I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t)\,dt}.$$

Через эти две средние величины выражается длительность светового импульса:

$$\Delta t=\sqrt{\left\langle t^2\right\rangle-\langle t\rangle^2}.$$

Повторим, что среднеквадратичные отклонения $\Delta\omega$ и Δt связаны соотношением $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$. Равенство $\Delta\omega\Delta t = \frac{1}{2}$ достигается только в том случае, когда спектр импульса представляет собой гауссову функцию частоты $\sim e^{-2\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$, а огибающая импульса — гауссова функция времени $\sim e^{-\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$. Интенсивность — тоже гауссова функция $\sim e^{-2\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$.

В оптике часто оказывается, что среднеквадратичное отклонение частоты от средней частоты бесконечно $\Delta\omega = \infty$, например, для лоренцевского контура спектральной линии. В таком случае неравенство в форме $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$ становится неинформативным. Но неравенство $\Delta\omega\Delta t > 1$, где $\Delta\omega$ и Δt ширина на половине высоты соответствующих контуров, по-прежнему имеет смысл.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Соотношение неопределенности Гейзенберга.

Рассмотрим соотношение неопределенности частоты и времени в сочетании с выражением для энергии фотона:

$$\begin{cases} \Delta\omega\Delta t \geq \dfrac{1}{2} \\ E = h\nu = \hbar\omega \end{cases}.$$

Умножим первое равенство на $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ и с учетом второго равенства получим:

$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ — соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени, справедливое как для фотона, так и любой другой частицы.

Это соотношение означает, что нельзя одновременно и точно знать и время возможной регистрации фотона, и ожидаемую энергию фотона при его регистрации.

Чем точнее будет известно время регистрации фотона, тем больше неопределенность в энергии фотона. Это следует из того, что для точного определения момента необходимо, чтобы световой импульс был коротким. При этом спектр импульса автоматически, на основе свойств преобразования Фурье, оказывается широким. Энергия фотона пропорциональна частоте, поэтому и энергия регистрируемого фотона оказывается в состоянии с большой неопределенностью.

Заметим, что аналогичное соотношение неопределенности можно написать для координаты и импульса. При этом нужно рассмотреть свет не в одной пространственной точке во все моменты времени, а во всем пространстве в один момент времени.

Любую ограниченную в пространстве и времени волну без особых точек можно представить, как суперпозицию плоских монохроматических волн.

Рассмотрим выражение для фазы плоской монохроматической волны любой природы:

$$\varphi = \left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0 .$$

В это выражение произведение $-\omega t$ входит, точно также как произведение $k_x x$. Если свойства преобразования Фурье по временной координате t приводят к соотношению

$$\Delta\omega \Delta t \geq \frac{1}{2}, \text{ то}$$

свойства преобразования Фурье по пространственной координате x обязаны приводить к соотношению

$$\Delta k_x \Delta x \geq \frac{1}{2}.$$

Умножим это соотношение на $\hbar$ и получим

$$\Delta\left(\hbar k_x\right)\Delta x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Рассмотрим импульс фотона

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar\frac{\omega}{c} = \hbar k \qquad \Rightarrow \qquad p = \hbar k \qquad \Rightarrow$$

$$p_x = \hbar k_x .$$

Тогда соотношение неопределенности для x координаты примет вид:

$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ — это тоже соотношение неопределенности Гейзенберга только для координаты и проекции импульса.

Эти соотношения неопределенности $\begin{cases} \Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases}$ справедливы не только для фотона, но и для любой другой частицы, так как согласно предположению де Бройля (в квантовой механике) каждая частица одновременно является волной, для которой частота и длина волны связаны с энергией и импульсом частицы соотношениями:

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \cdot \end{cases}$$

Любопытно, что согласно теории вторичного квантования (подробнее в последней лекции за 2010г.) фаза светового поля и число фотонов тоже не могут быть одновременно строго определены, то есть подчиняются некоторому соотношению неопределенности.

Интерференция.

Экзамен. Явление интерференции. Ширина полос. Видность.

Говорят, что волны интерферируют, если интенсивность суммарной волны не равна сумме интенсивностей:

$$I \neq \sum_m I_m .$$

Световые волны разных частот не интерферируют.

Факультативная вставка.

Поясним это.

Световое поле известно только на ограниченном интервале времени T. Всегда с достаточной точностью можно заменить реальную зависимость напряженности светового поля от времени периодической функцией времени с периодом T. Тогда все частоты в ее Фурье разложении кратны некоторой малой частоте $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а свет разных частот можно рассматривать, как разные компоненты этого ряда Фурье.

Мы уже обсуждали, что для ряда Фурье $\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t}$ справедливо равенство $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$, где $I_m = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} \left| \tilde{E}_m \right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$, коэффициенты разложения ряда Фурье — $\tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_m t} dt$. То есть при усреднении за бесконечное время $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu} \left\langle E^2(t) \right\rangle_t$ световые волны разных частот не интерферируют $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$.

Конец факультативной вставки.

При наблюдении интерференции подразумевается, что складываются почти однонаправленные световые волны. Только для таких волн определено понятие интенсивности.

Интерференцию наблюдают на экране, который ставят почти перпендикулярно лучам.

На экране образуются светлые и темные полосы.

Ширина интерференционных полос — расстояние между центрами соседних светлых полос.

$V \equiv \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ — определение видности интерференционной картины. Здесь $I_{\max}$ — интенсивность в максимуме интенсивности светлой полосы (в середине светлой полосы), $I_{\min}$ — интенсивность в минимуме интенсивности (в середине темной полосы). В последнее время вместо видности все чаще говорят о контрастности интерференционной картины, подразумевая ту же самую величину.

$0 \le I_{\min} \le I_{\max}$ =>

$0 \le V \le 1$.

$V = 0$ <=> $I_{\max} = I_{\min}$ — отсутствие интерференционных полос.

$V = 1$ <=> $I_{\min} = 0$ — максимальный контраст интерференционных полос.

Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн ортогональных поляризаций.

На примере двух линейно поляризованных волн докажем, что свет ортогональных поляризаций не интерферирует в том смысле, что

$$I = I_1 + I_2.$$

В каждый момент времени для двух ортогональных поляризаций

$$E^2(t) = E_1^2(t) + E_2^2(t)$$

по теореме Пифагора.

Если равенство справедливо в каждый момент времени, то оно справедливо и для средних по времени значений:

$$\left\langle E^2(t) \right\rangle_t = \left\langle E_1^2(t) \right\rangle_t + \left\langle E_2^2(t) \right\rangle_t.$$

Умножим это равенство на $\dfrac{\varepsilon_0 c n}{\mu}$ и с учетом соотношения $I = \dfrac{\varepsilon_0 c n}{\mu} \left\langle E^2(t) \right\rangle_t$ получим

$$I = I_1 + I_2.$$

Факультативная вставка.

Две поляризации света будем называть ортогональными, если единичные векторы поляризаций ортогональны:

$$\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) = 0.$$

Например, для света, направленного вдоль оси z, ортогональны поляризации по декартовым осям

$$\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y\right) = 0,$$

ортогональны и две круговые поляризации

$$\left(\vec{e}_+, \vec{e}_-\right) = 0,$$

где $\vec{e}_+$ — единичный вектор левой круговой поляризации, $\vec{e}_-$ — единичный вектор правой круговой поляризации. Если свет направлен вдоль оси z, то

$$\begin{cases} \vec{e}_+ = \dfrac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- = \dfrac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Выразим интенсивность света через комплексную амплитуду света $\tilde{\vec{E}}_0$:

$$I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}E_0^2 = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right).$$

Рассмотрим две световые волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении $\vec{k}$:

$$\tilde{\vec{E}}(t) = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} =$$

$$= \left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right)\cdot e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{E}_0\vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}.$$

Подставим в выражение $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right)$ для интенсивности комплексную амплитуду в виде $\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}$ и получим:

$$I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right) = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}, \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{01}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p2}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p2}\right)\right\}.$$

Учтем, что поляризации ортогональны $\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p2}\right) = 0$ и получим:

$$I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p2}\right)\right\} = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left(\left|\tilde{E}_{01}\right|^2 + \left|\tilde{E}_{02}\right|^2\right) = I_1 + I_2$$

=> $I = I_1 + I_2$ =>

Ортогональные поляризации не интерферируют.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн одинаковой поляризации, как функция разности фаз.

Рассмотрим линейную поляризацию двух световых волн.

Напряженность суммарного светового поля равна сумме напряженностей двух световых полей. В вещественном представлении полей получаем:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_{01}\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) + E_{02}\cos\left(\omega t + \varphi_2\right).$$

Интенсивность в выражении через вещественное поле имеет вид

$$I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle\left(E_1(t) + E_2(t)\right)^2\right\rangle_t =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left(\left\langle E_1^2(t)\right\rangle_t + 2\left\langle E_1(t)E_2(t)\right\rangle_t + \left\langle E_2^2(t)\right\rangle_t\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\cdot\left\{E_{01}^2\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi_1)\right\rangle_t + 2E_{01}E_{02}\left\langle\cos(\omega t+\varphi_1)\cdot\cos(\omega t+\varphi_2)\right\rangle_t + \right.$$

$$\left. + E_{02}^2\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi_2)\right\rangle_t\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2} + E_{01}E_{02}\left\langle\cos(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right\rangle_t + E_{02}^2\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2} + E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1-\varphi_2) + E_{02}^2\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left(E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right) =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

Окончательно получаем:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi),$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз интерферирующих волн с одинаковой поляризацией и с интенсивностями I_1 и I_2.

Факультативная вставка.

Это выражение для интенсивности будет справедливо не только для линейной поляризации двух волн, но и для любой одинаковой эллиптической поляризации двух складываемых волн. И действительно. Если свет эллиптической поляризации пропустить через пластинку $\frac{\lambda}{4}$, то поворотом пластинки вокруг луча на выходе пластинки можно получить свет линейной поляризации. Если на пути двух световых волн одинаковой эллиптической поляризации поставить пластинку $\frac{\lambda}{4}$, которая превратит поляризацию волн в линейную, то для линейной поляризации получим $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$. Фазовая пластинка не изменяет интенсивности I, I_1, I_2, следовательно, соотношение для интенсивностей будет справедливо и для эллиптически поляризованных волн.

Конец факультативной вставки.

Часто интенсивность суммарной световой волны выражают через оптическую разность хода Δ, которая связана с разностью фаз $\Delta\varphi$ соотношением $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta}{\lambda}$. Тогда

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(2\pi\frac{\Delta}{\lambda}\right).$$

Факультативная вставка.

Если равенством

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$$

воспользоваться для рассмотрения сложения двух световых волн с разницей частот $\Delta\omega$, то $\Delta\varphi = \Delta\omega \cdot t + \varphi_0$, и при усреднении за большой промежуток времени $\left\langle \cos(\Delta\varphi) \right\rangle_t = 0$. Откуда следует, что при сложении двух волн разных частот $I = I_1 + I_2$ — волны разных частот не интерферируют. Аналогичный результат получается при сложении большего числа световых волн разных частот.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Интенсивность при сложении двух волн произвольной поляризации.

Рассмотрим интерференцию двух волн различной, но не обязательно ортогональной поляризации.

Пусть, например, две световые волны распространяются вдоль оси *Z*. Каждую из двух волн можно представить как сумму двух линейно поляризованных волн с поляризациями вдоль оси *X* и вдоль оси *Y*. В результате получаются 4 волны, две из которых поляризованы вдоль оси *X*, и две — вдоль оси *Y*.

Волны, поляризованные воль оси *X*, будут интерферировать как волны одинаковой поляризации

$$I_{13} = I_1 + I_3 + 2\sqrt{I_1 I_3}\cos\left(2\pi\frac{\Delta_{13}}{\lambda}\right).$$

Аналогично между собой будут интерферировать волны, поляризованные вдоль оси *Y*

$$I_{24} = I_2 + I_4 + 2\sqrt{I_2 I_4}\cos\left(2\pi\frac{\Delta_{24}}{\lambda}\right).$$

Суммарная волна, поляризованная вдоль оси X, ортогональна суммарной волне, поляризованной воль оси Y. При сложении волн ортогональной поляризации интенсивности волн складываются

$$I = I_{13} + I_{24}.$$

Оси X и Y можно направить как угодно в плоскости перпендикулярной направлению света. Если хотя бы одна из двух интерферирующих световых волн имеет линейную поляризацию, то удобно ось X направить вдоль направления этой поляризации.

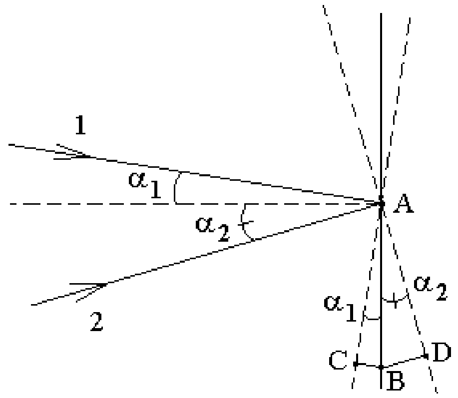
Экзамен. Связь ширины интерференционных полос и угла между интерферирующими волнами.

Обычно при рассмотрении интерференции два интерферирующих луча и нормаль к экрану находятся в одной плоскости. Только такой вариант мы и будем рассматривать.

Докажем, что для малых углов между нормалью к экрану и каждым лучом ширину интерференционных полос можно найти по формуле:

$$d = \frac{\lambda}{\alpha},$$

где α — угол между интерферирующими лучами, d — ширина интерференционных полос.



Пусть в точку A на экране две световые волны 1 и 2 приходят в одинаковой фазе. Тогда точка A — середина светлой полосы. Для простоты будем считать, что для точки A оптическая разность хода интерферирующих волн равна нулю, а не просто кратна длине волны λ.

В точках A и C фазы первой световой волны равны, так как эти точки находятся на одной поверхности равных фаз, перпендикулярной лучу 1.

Аналогично в точках A и D фазы второй световой волны равны.

Тогда фаза 1-ой волны в точке C равна фазе 2-ой волны в точке D, так как фазы двух волн одинаковы в точке A. Соответствующая разность хода для точек C и D равна нулю.

Волна 1 еще не дошла до точки B на отрезок CB. Волна 2 уже прошла точку B на отрезок BD.

Тогда разность хода Δ волн 1 и 2 в точке B будет равна:

$$\Delta = CB + BD = AB \cdot \sin(\alpha_1) + AB \cdot \sin(\alpha_2) =$$

$$= AB \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) \approx AB \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha \cdot AB, \text{ где}$$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ — угол между лучами 1 и 2.

Итак

$$\Delta \approx \alpha \cdot AB.$$

Пусть AB — ширина интерференционных полос, тогда $AB = d$. Разность хода при переходе от одной светлой полосы к соседней светлой полосе изменяется на длину волны λ. Тогда при переходе от точки A к точке B разность хода изменяется на $\Delta = \lambda$.

Сравнивая это с равенством $\Delta \approx \alpha \cdot AB$, получаем:

$$\lambda = \alpha d \quad =>$$

$$d = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Что и требовалось доказать.

Интересно, что ширина полос зависит только от угла между интерферирующими волнами и не зависит от любых других особенностей оптической схемы получения интерференции.