Лекционные демонстрации 23 минуты.

Дифракция.

Дифракция волн — это огибание волнами препятствий.

Как и интерференцию, будем рассматривать дифракцию в вакууме.

Факультативно. Интегральная теорема Кирхгофа.

Интегральная теорема Кирхгофа позволяет выразить амплитуду светового поля в точке наблюдения через интеграл по любой замкнутой поверхности, охватывающей эту точку наблюдения. В следующем вопросе мы обсудим то, что вклады от разных точек охватывающей поверхности можно рассматривать, как излучения вторичных источников света расположенных на этой поверхности.

Рассмотрим волновое уравнение для комплексного светового поля:

$\Delta\tilde{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\tilde{E}}{\partial t^2} = 0$, где c — фазовая скорость световых волн.

Пусть зависимость поля $\tilde{E}$ от времени монохроматическая

$\tilde{E}(t,\vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot e^{-i\omega t}$.

Подставим это выражение в волновое уравнение и получим уравнение Гельмгольца для пространственной зависимости комплексной амплитуды $\tilde{E}_0(\vec{r})$ комплексного поля $\tilde{E}(t,\vec{r})$:

$\Delta\tilde{E}_0 + k^2\tilde{E}_0 = 0$, где $k = \dfrac{\omega}{c}$.

$\tilde{E}_0(\vec{r})$ — комплексная амплитуда разная в разных точках пространства.

Рассмотрим два любых решения уравнения Гельмгольца: $\varphi(\vec{r})$ и $\psi(\vec{r})$. Тогда

$$\begin{cases}\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \\ \Delta\psi + k^2\psi = 0\end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на ψ, второе умножим на φ, и рассмотрим разность двух уравнений:

$$\psi\,\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим

$$div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\psi\right) = div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi\right) - div\left(\varphi\vec{\nabla}\psi\right) = \left(\vec{\nabla},\psi\vec{\nabla}\varphi\right) - \left(\vec{\nabla},\varphi\vec{\nabla}\psi\right).$$

Каждое из двух слагаемых раскроем, как производную от произведения и получим:

$$\left(\vec{\nabla},\psi\vec{\nabla}\varphi\right) - \left(\vec{\nabla},\varphi\vec{\nabla}\psi\right) = \left(\vec{\nabla}\psi,\vec{\nabla}\varphi\right) + \psi\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right) - \left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{\nabla}\psi\right) - \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\psi\right) =$$
$$= \psi\,\Delta\varphi - \varphi\,\Delta\psi = 0$$

Последнее равенство нулю следует из равенства (1).

Итак $div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right)=0$ =>

$$0=\int\limits_V div\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right)dV=\oint\limits_S\left(\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right),d\vec{S}\right), \qquad (2)$$

где последнее равенство — это теорема Гаусса-Остроградского, примененная к векторному полю $\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right)$. Далее

$$\oint\limits_S\left(\left(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi\right),d\vec{S}\right)=\oint\limits_S\left(\psi\left(\vec{\nabla}\varphi,d\vec{S}\right)-\varphi\left(\vec{\nabla}\psi,d\vec{S}\right)\right).$$

Заметим, что

$\left(\vec{\nabla}\varphi,d\vec{S}\right)=\left(\vec{\nabla}\varphi\right)_{d\vec{S}}dS=\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль поверхности S. Тогда

$$\oint\limits_S\left(\psi\left(\vec{\nabla}\varphi,d\vec{S}\right)-\varphi\left(\vec{\nabla}\psi,d\vec{S}\right)\right)=\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0.$$

Последнее равенство

$$\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0 \qquad (3)$$

нулю определяется левой частью равенства (2).

Подставим в равенство (3) $\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0$ функции φ и ψ в виде:

$\begin{cases}\varphi=\tilde{E}_0\left(\vec{r}\right)\\ \psi=\dfrac{e^{ikr}}{r}\end{cases}$, где $\tilde{E}_0\left(\vec{r}\right)$ — комплексная амплитуда светового поля.

Чтобы иметь право подставить обе функции в равенство (3) $\oint\limits_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0$ необходимо, чтобы обе функции удовлетворяли уравнению Гельмгольца:

$$\begin{cases}\Delta\varphi+k^2\varphi=0\\ \Delta\psi+k^2\psi=0\end{cases}.$$

Комплексная амплитуда светового поля $\tilde{E}_0\left(\vec{r}\right)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\tilde{E}_0+k^2\tilde{E}_0=0,$$

так как само световое поле $\tilde{E}\left(t,\vec{r}\right)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\tilde{E}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde{E}}{\partial t^2}=0$$

и мы хотим рассмотреть монохроматическое световое поле в виде

$$\tilde{E}(t,\vec{r}) = \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}.$$

Покажем теперь, что функция $\psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$ тоже удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Функция $\psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$ имеет сферическую симметрию, поэтому проверку удобно проводить в сферической системе координат, где оператор Лапласа имеет следующий вид:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

Функция $\psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$ зависит только от координаты r. В таком случае нужно рассмотреть только производные по r.

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \qquad =>$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\left(-\frac{e^{ikr}}{r^2} + ik\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(-e^{ikr} + ikr\cdot e^{ikr}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\left(-ik\cdot e^{ikr} + \left(ik\cdot e^{ikr} - k^2 r\cdot e^{ikr}\right)\right) = -k^2\cdot\frac{e^{ikr}}{r} = -k^2\psi$$

Сравнивая начало и конец цепочки равенств, получим

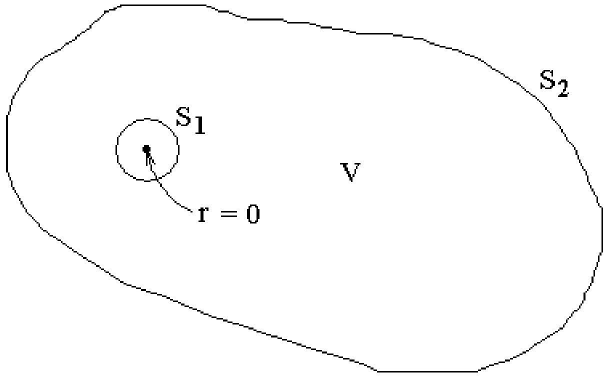
$\Delta\psi + k^2\psi = 0$ — уравнение Гельмгольца для функции ψ.

Подставим $\begin{cases}\varphi = \tilde{E}_0(\vec{r}) \\ \psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}\end{cases}$ в равенство (1) $\oint\limits_S\left(\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS = 0$ и получим

$$\oint\limits_S\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS = 0 \qquad (4)$$

Теорема Гаусса-Остроградского, на основе которой были получены равенства (3) и (4), справедлива только в том случае, если подынтегральная функция не имеет особых точек в объеме V, то есть не обращается в бесконечность ни в одной точке объема V. Нас же будет интересовать случай, когда точка $r = 0$ находится внутри рассматриваемого объема V. Из объема, ограниченного поверхностью S нам нужно исключить точку $r = 0$, в которой функция $\psi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$ обращается в бесконечность.

Будем считать, что граница S объема V двусвязная и состоит из двух односвязных поверхностей S_1 и S_2.



Здесь S_1 — малая сфера с центром в точке $r = 0$.

Если в равенстве (4) $\vec{n}$ — внешняя нормаль объема V, то

$\oint\limits_{S_1} + \oint\limits_{S_2} = 0$.

Если же в равенстве (4) $\vec{n}$ — внешняя нормаль поверхностей S_1 и S_2, то

$$-\oint\limits_{S_1} + \oint\limits_{S_2} = 0 \qquad => \qquad \oint\limits_{S_1} = \oint\limits_{S_2} \qquad <=>$$

$$\oint\limits_{S_1}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS = \oint\limits_{S_2}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS$$

Рассмотрим подробнее $\oint\limits_{S_1}$ — интеграл по малой сфере.

$$\oint\limits_{S_1} = \oint\limits_{S_1}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right)\cdot dS =$$

$$= \oint\limits_{S_1}\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}\cdot dS - \oint\limits_{S_1}\tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot dS \approx$$

$$\approx \frac{e^{ikr}}{r}\cdot\oint\limits_{S_1}\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}\cdot dS - \tilde{E}_0(\vec{r})\cdot\oint\limits_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot dS \qquad (5)$$

В последнем равенстве из первого интеграла вынесен сомножитель $\frac{e^{ikr}}{r}$, так как он постоянен на поверхности сферы с постоянным радиусом r. Из второго интеграла вынесен сомножитель $\tilde{E}_0(\vec{r})$, так как он почти постоянен для сферы малого радиуса.

Рассмотрим первое слагаемое $\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\oint\limits_{S_1}\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}\cdot dS$ в получившемся выражении. Здесь подынтегральное выражение $\frac{\partial\tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n}$ ограничено, так как

$\tilde{E}_0(\vec{r})$ не имеет особенности при $r=0$. Площадь сферы $S_1 = 4\pi r^2 \sim r^2$. Тогда и весь интеграл $\oint\limits_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS$ ограничен слагаемым пропорциональным r^2 с учетом ограниченности подынтегрального выражения. При малых значениях величины r сомножитель перед интегралом $\frac{e^{ikr}}{r}$ примерно пропорционален $\frac{1}{r}$, и все выражение с первым интегралом стремится к нулю:

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS \sim r \xrightarrow[r \to 0]{} 0.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в выражении (5)

$\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \cdot dS - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS$, а именно:

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS.$$

Здесь сомножитель перед интегралом $\tilde{E}_0(\vec{r}) \approx \tilde{E}_0(0)$ — это амплитуда светового поля в точке $r=0$, а $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$. Тогда

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS = -\tilde{E}_0(0) \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS = -\tilde{E}_0(0) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot \oint\limits_{S_1} dS$$

В последнем выражении при малых значениях r получим $\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{1}{r}$. Тогда $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \approx -\frac{1}{r^2}$. Следовательно, два интеграла выражения (5) можно заменить одним вторым интегралом и получить

$$-\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \oint\limits_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot dS \approx -\tilde{E}_0(0) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot \oint\limits_{S_1} dS \approx$$

$$\approx -\tilde{E}_0(0) \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) \cdot \oint\limits_{S_1} dS = \tilde{E}_0(0) \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \tilde{E}_0(0).$$

Тогда из равенства интегралов по двум поверхностям $\oint\limits_{S_1} = \oint\limits_{S_2}$ и равенства первого интеграла величине $4\pi\tilde{E}_0$ получаем:

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint\limits_{S_2} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} - \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) \cdot dS .$$

Здесь $\vec{n}$ — внешняя нормаль поверхности S_2. Заменим ее на внутреннюю нормаль, а появляющийся при этом знак минус компенсируем переменой мест подынтегральных слагаемых. Поскольку в рассмотрении осталась только поверхность S_2 переобозначим $S_2 \to S$ и получим интегральную теорему Кирхгофа в окончательном виде:

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint\limits_{S} \left(\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \right) \cdot dS , \qquad (6)$$

где $\vec{n}$ — внутренняя нормаль замкнутой поверхности S, и точка $r = 0$ расположена внутри этой замкнутой поверхности.

Экзамен. Скалярная теория дифракции Кирхгофа.

При рассмотрении предыдущего вопроса мы сознательно не писали значка вектора у напряженности электрического поля $\tilde{E}(t, \vec{r})$ и у амплитуды напряженности $\tilde{E}_0(\vec{r})$.

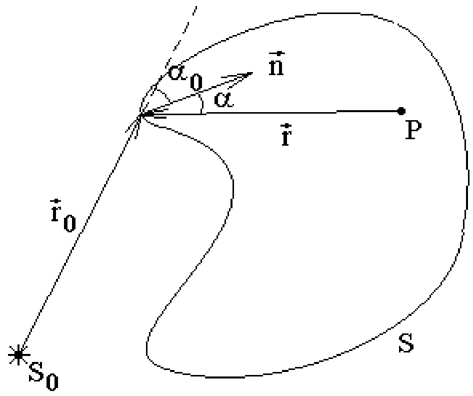
Теория дифракции Кирхгофа называется скалярной, чтобы подчеркнуть ее нестрогость в применении к рассмотрению дифракции светового поля.

В обсуждаемой ниже теории Кирхгофа рассматривают точечный источник света, излучающий сферически симметричные волны с комплексной амплитудой вида:

$$\tilde{E}_0(\vec{r}_0) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0},$$

где $\vec{r}_0$ — вектор, проведенный из точечного источника света в точку наблюдения. На самом деле электромагнитные волны поперечны, а поперечные волны не могут быть сферически симметричны. Вместо сферически симметричного поля надо было бы рассматривать поле излучающего диполя.

Итак, пусть источником света является один точечный сферически симметричный источник S_0. Нас будет интересовать световое поле в точке наблюдения P. Точку наблюдения охватывает замкнутая поверхность S такая, что источник света S_0 расположен снаружи поверхности S.



Введем необходимые обозначения:

$\vec{r}$ — радиус-вектор из точки наблюдения P в точку на поверхности S,

$\vec{r}_0$ — радиус-вектор из источника света S_0 в точку на поверхности S,

$\vec{n}$ — внутренняя нормаль поверхности S.

α_0 и α — углы, на которые свет поворачивает от источника к внутренней нормали и от внутренней нормали к точке наблюдения. Другими словами:

$\alpha_0 \equiv \left(\widehat{\vec{n},\vec{r}_0}\right)$ — угол между нормалью к поверхности и вектором, направленным от источника света S_0 в точку на поверхности S.

$\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{n},-\vec{r}}\right)$ — угол между нормалью к поверхности и вектором, направленным из точки поверхности S в точку наблюдения P.

В формулу (6) рассмотренной раньше интегральной теоремы Кирхгофа

$$\tilde{E}_0(0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_0(\vec{r})}{\partial n} \right) \cdot dS$$

подставим поле точечного сферически симметричного источника света

$$\tilde{E}_0(\vec{r}_0) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$

и получим

$$\tilde{E}_0(0) = \tilde{E}_P = \frac{A_0}{4\pi} \cdot \oint_S \left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) \right) \cdot dS.$$

Функция $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ зависит только от r, поэтому градиент этой функции направлен вдоль вектора $\vec{r}$, и длина градиента равна модулю производной от функции по r. Производная от функции $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ по любому другому направлению равна проекции градиента на это направление и может быть выражена как производная по r, умноженная на косинус угла между $\vec{r}$ и направлением дифференцирования. В нашем случае направление дифференцирования $\vec{n}$ —

это направление внутренней нормали к поверхности S. Рассмотрим этот косинус

$$\cos\left(\vec{n},\vec{r}\right)=-\cos\left(\vec{n},-\vec{r}\right)=-\cos\left(\alpha\right)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot\left(-\cos\left(\alpha\right)\right)=\left(ik\frac{e^{ikr}}{r}-\frac{1}{r^2}e^{ikr}\right)\cdot\left(-\cos\left(\alpha\right)\right).$$

В последнем равенстве подставлена производная от произведения e^{ikr} на $\frac{1}{r}$. Длина волны мала по сравнению с любыми расстояниями. Тогда

$$r>>\lambda \qquad => \qquad \frac{1}{r}<<k=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad => \qquad \frac{1}{r^2}<<\frac{k}{r}.$$

Следовательно, второе слагаемое в выражении производной по нормали можно отбросить. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\approx -ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos\left(\alpha\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)=\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\cdot\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{r}_0}\right)=$$

$$=\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\cdot\cos\left(\alpha_0\right)=\left(ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}-\frac{1}{r_0^2}e^{ikr_0}\right)\cdot\cos\left(\alpha_0\right).$$

С учетом $r_0>>\lambda$ можно отбросить второе слагаемое и получить

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\approx ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos\left(\alpha_0\right).$$

Подставим выражения производных по нормали $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\approx -ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos\left(\alpha\right)$ и $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\approx ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos\left(\alpha_0\right)$ в интеграл по поверхности S и получим:

$$\tilde{E}_P=\frac{A_0}{4\pi}\cdot\oint_S\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\left(-ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos\left(\alpha\right)\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\left(ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos\left(\alpha_0\right)\right)\right)\cdot dS=$$

$$=-\frac{A_0}{4\pi}\cdot\oint_S\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot ik\frac{e^{ikr}}{r}\cos\left(\alpha\right)+\frac{e^{ikr}}{r}\cdot ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\cdot\cos\left(\alpha_0\right)\right)\cdot dS$$

$$=-\frac{A_0 ik}{4\pi}\cdot\oint_S\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\cos\left(\alpha\right)+\cos\left(\alpha_0\right)\right)dS.$$

В этом выражении заменим обратно сферически симметричную волну точечного источника $A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ на $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$. И будем считать, что поле с амплитудой $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$ не обязательно создано точечным источником. Это можно сделать, если считать, что любое световое поле с любым распределением амплитуды $\tilde{E}_0(\vec{r}_0)$ можно представить, как совокупность излучений $A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ точечных источников. Строго говоря, это не справедливо, хотя бы потому, что вместо сферически симметричного излучения точечного источника логичнее рассматривать излучение точечного электрического диполя. Тем не менее, вслед за Кирхгофом получим

$$\tilde{E}_P = -\frac{ik}{4\pi} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(\cos(\alpha) + \cos(\alpha_0)\right) dS .$$

Подставим сюда $\frac{k}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$ и получим окончательное выражение

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \oint_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)\right) dS . \qquad (4)$$

Эта формула представляет поле в точке наблюдения P, как сумму полей вторичных источников света, расположенных на поверхности S замкнутой вокруг точки наблюдения P.

Проанализируем амплитуду излучения каждого вторичного источника света в точке наблюдения P.

Амплитуда пропорциональна площади излучающей площадки dS, комплексной амплитуде поля $\tilde{E}_0(\vec{r})$ в точке вторичного источника и обратно пропорциональна $\sim \frac{1}{r}$ расстоянию r от вторичного источника до точки наблюдения P. Зависимость амплитуды от расстояния вида $\sim \frac{1}{r}$ хорошо согласуется с тем фактом, что через любую сферу проходит одинаковая энергия, тогда интенсивность спадает с расстоянием обратно пропорционально площади сферы $\sim \frac{1}{r^2}$, а амплитуда ведет себя, как корень из интенсивности $\sim \frac{1}{r}$. Амплитуда в точке P имеет фазовый множитель e^{ikr}, который определяется запаздыванием фазы на величину $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ в точке наблюдения относительно фазы вторичного источника. Кроме того, амплитуда вторичного источника пропорциональна сомножителю

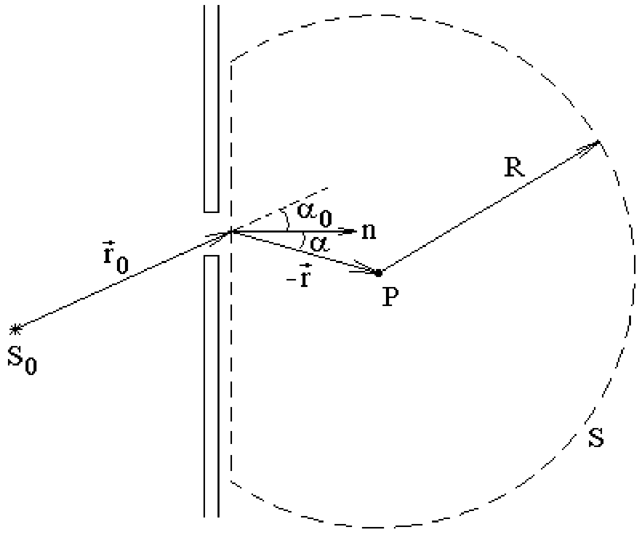
$$-\frac{i}{2\lambda}\cdot\left(\cos\left(\alpha_0\right)+\cos\left(\alpha\right)\right),$$

который называют коэффициентом наклона. Коэффициент наклона описывает зависимость излучательной способности вторичного источника света от направления волны пришедшей ко вторичному источнику и от направления волны ушедшей от вторичного источника.

Заметим, что вторичный источник света не излучает строго назад, так как при условии

$\alpha_0+\alpha=\pi$ получаем $\cos\left(\alpha_0\right)+\cos\left(\alpha\right)=0$.

Экзамен. Применение теории Кирхгофа к дифракции света на отверстии в непрозрачном плоском экране.



$$\tilde{E}_P=-\frac{i}{2\lambda}\oint_S\tilde{E}_0\left(\vec{r}\right)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\left(\cos\left(\alpha_0\right)+\cos\left(\alpha\right)\right)\cdot dS$$

В качестве охватывающей точку наблюдения P поверхности S выберем сферу с радиусом R и центром в точке P. Часть сферы, которая находится до экрана, с другой стороны экрана от точки наблюдения, заменим плоскостью, расположенной вплотную к экрану со стороны точки наблюдения P.

Мысленно разобьем пунктирную поверхность S на три части:

$S=S_1+S_2+S_3$, где

S_1 — поверхность оставшейся справа от экрана части сферы,

S_2 — плоская поверхность, примыкающая непосредственно к экрану,

S_3 — поверхность отверстия в экране.

Согласно Кирхгофу интеграл нужно брать только по поверхности S_3, так как оба других интеграла стремятся к нулю, по крайней мере, при стремлении радиуса сферы R к бесконечности.

$\int\limits_{S_2}\to 0$, так как световое поле за непрозрачным экраном очень мало.

Факультативная вставка.

Сложнее показать, что $\int\limits_{S_1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Это происходит только благодаря сомножителю в виде коэффициента наклона. И действительно, с одной стороны, на большом расстоянии R от отверстия амплитуда $\tilde{E}_0$ поля вторичных источников на поверхности сферы спадает с расстоянием $\tilde{E}_0 \sim \frac{1}{R}$, и сомножитель $\frac{e^{ikr}}{r}$ в подынтегральном выражении спадает, как $\sim \frac{1}{R}$, так как $r = R$, но с другой стороны, площадь поверхности сферы растет $S \sim R^2$. Поэтому, казалось бы, интеграл должен стремиться к константе. Этого не происходит из-за коэффициента наклона. Для большого радиуса сферы R свет приходит к поверхности сферы почти вдоль радиуса и излучается вторичным источником в точку P обратно вдоль радиуса сферы. Вторичный источник света назад не излучает, так как при излучении назад $\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha) = 0$.

Конец факультативной вставки.

По теории Кирхгофа для дифракции на отверстии в плоском экране достаточно суммировать излучение вторичных источников только по поверхности отверстия по формуле

$$\tilde{E}_P = -\frac{i}{2\lambda} \int\limits_S \tilde{E}_0(\vec{r}) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \left(\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha)\right) \cdot dS.$$

Здесь $\tilde{E}_0(\vec{r})$ — комплексная амплитуда светового поля в плоскости отверстия,

$\vec{r}$ —вектор из точки наблюдения P в точку вторичных источников на поверхности отверстия,

α_0 —угол между лучом, пришедшим к отверстию, и нормалью к экрану $\vec{n}$,

α — угол между нормалью к экрану $\vec{n}$ и направлением $(-\vec{r})$ от вторичного источника к точке наблюдения.

Заметим, что обычно оба угла α_0 и α — острые углы, так как $\vec{n}$ — нормаль к экрану в направлении распространения света.

Во многих практически важных случаях световая волна падает на экран перпендикулярно экрану. Тогда $\alpha_0 = 0$ => $\cos(\alpha_0) = 1$ =>

$-\frac{i}{2\lambda}\left(1 + \cos(\alpha)\right)$ — коэффициент наклона, при нормальном падении света на экран, α — угол поворота света на вторичном источнике.

Кроме того, обычно считают, что источник света расположен далеко перед экраном, поэтому амплитуда поля в разных точках отверстия примерно одинаковая $\tilde{E}_0(\vec{r}) = E_0 = const$. Точка наблюдения обычно расположена далеко от отверстия в экране по сравнению с размерами отверстия. В таком случае подынтегральный множитель $\frac{1}{r} \approx const$ имеет примерно одинаковое значение для всех точек отверстия, поэтому его заменяют константой. Обычно рассматривают только малые углы дифракции. В таком случае $\alpha \approx 0$ и коэффициент наклона слабо зависит от угла дифракции $-\frac{i}{2\lambda}\left(1+\cos(\alpha)\right) \approx const$. В результате, во многих случаях интеграл Кирхгофа по площади отверстия рассматривают в упрощенном виде

$$\tilde{E}_P \sim E_0 \int_S e^{ikr} dS,$$

где r — расстояние от вторичного источника света в плоскости отверстия до точки наблюдения, в которой нужно рассчитать амплитуду света, dS — площадь малого вторичного источника в плоскости отверстия непрозрачного экрана.