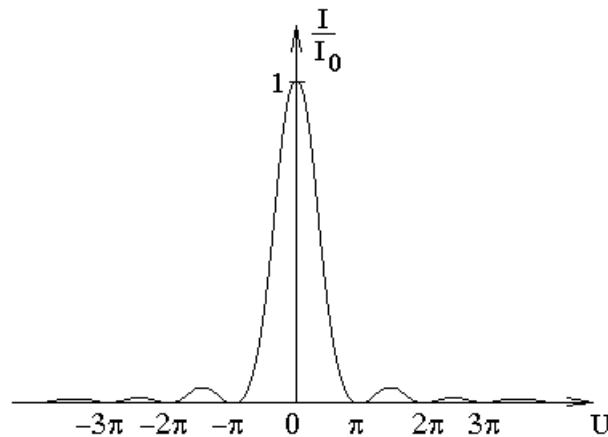


Лекционные демонстрации 13 минут.

Экзамен. Дифракция Фраунгофера на одной щели (продолжение).



Найдем величину угла дифракции α , соответствующую первой темной полосе.

$$I(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin(U) = 0 \Rightarrow U = \pi \Rightarrow \frac{1}{2}kD \cdot \sin(\alpha) = \pi \Rightarrow$$

$$\alpha \approx \sin(\alpha) = \frac{2\pi}{kD} = \frac{\lambda}{D}.$$

Большая часть света при дифракции на щели идет в угол $2\frac{\lambda}{D}$, где D — ширина щели. При дифракции света на любом препятствии характерный угол дифракции равен $\frac{\lambda}{D}$, где D — размер препятствия. Так напомним, что при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии угловой радиус первого темного кольца $\alpha = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$.

Факультативная вставка.

Рассмотрим теперь задачу дифракции Фраунгофера на одной щели графически в виде векторных диаграмм на комплексной плоскости амплитуд.

Разобьем щель на тонкие полоски вторичных источников.

Пусть y — высота расположения полоски относительно нижнего края щели. Если полоски имеют равную ширину δy , то разность хода от соседних полосок $\delta\Delta$

$$\delta\Delta = \delta y \cdot \sin(\alpha),$$

что следует из выражения $\Delta = y \cdot \sin(\alpha)$ для разности хода между лучом, который проходит щель на высоте y , и лучом, который проходит через нижний край щели.

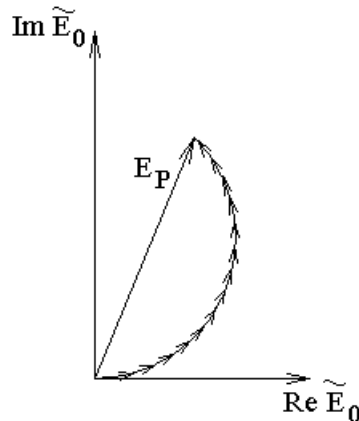
Разность фаз связана с разностью хода соотношением $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$, тогда

$$\delta(\Delta\varphi) = 2\pi \frac{\delta\Delta}{\lambda}.$$

Подставим сюда $\delta\Delta = \delta y \cdot \sin(\alpha)$ и получим

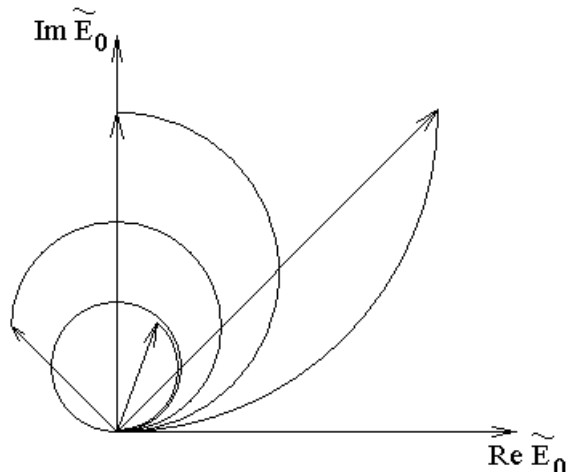
$$\delta(\Delta\varphi) = 2\pi \frac{\delta y \cdot \sin(\alpha)}{\lambda} \text{ — одинаковый фазовый сдвиг вкладов соседних}$$

полосок в комплексную амплитуду в точке наблюдения. Фазовый сдвиг равен углу поворота вектора на комплексной плоскости сложения амплитуд. С учетом этого картина сложения амплитуд на комплексной плоскости — дуга окружности:



При изменении угла дифракции α (изменении направления, в котором мы регистрируем свет) вклад в суммарную амплитуду \tilde{E}_p каждой из полосок щели не изменяется по величине, но поворачивается из-за изменения фазы вклада в точке наблюдения. При этом дуга на комплексной плоскости несколько сворачивается без изменения своей длины.

На следующем рисунке приведены картины сложения амплитуд на комплексной плоскости для разных направлений дифракции α .



Первый ноль амплитуды и интенсивности дифрагированного света соответствует дуге, свернувшейся в окружность. При этом разность фаз вкладов в комплексную амплитуду в точке наблюдения первой и последней полосок равен $\Delta\varphi = 2\pi$. Такой разности фаз соответствует разность хода

$$\Delta = \lambda.$$

Подставим это в выражение $\Delta = y \cdot \sin(\alpha)$, и, учитывая, что для последней полоски $y = D$, получим

$$\lambda = D \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \frac{\lambda}{D} \quad \text{— величина угла дифракции для}$$

первой темной полосы.

Полторы окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд соответствуют первому после нулевого максимуму зависимости интенсивности от угла дифракции. Две окружности — второй ноль интенсивности и т. д.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии.

Пусть a и b — размеры отверстия по осям x и y . Тогда комплексная амплитуда в точке наблюдения с точностью до постоянного множителя будет иметь следующий вид

$$\tilde{E}_P \sim \tilde{E}_0 \int_S e^{ikr'} dS = \tilde{E}_0 \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot e^{ikr'} \sim \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot e^{ikr'}$$

где \vec{r}' — вектор, направленный из вторичного источника в плоскости отверстия в точку наблюдения, r' — длина вектора или расстояние от точки отверстия до точки наблюдения.

Пусть точка с координатами $x=0$ и $y=0$ находится в углу прямоугольного отверстия. Пусть \vec{r} — вектор из этого угла в произвольную точку отверстия. Пусть \vec{r}_0' — вектор из того же угла в точку наблюдения дифракционной картины. Тогда

$$\vec{r}' = \vec{r}_0' - \vec{r} \quad \Rightarrow \quad kr' = (\vec{k}, \vec{r}') = (\vec{k}, \vec{r}_0') - (\vec{k}, \vec{r}) = kr_0' - (k_x x + k_y y) \quad \Rightarrow$$

$$e^{ikr'} = e^{ikr_0'} e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

Тогда

$$\tilde{E}_P \sim \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot e^{ikr'} = e^{ikr_0'} \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot e^{-ik_x x - ik_y y} \sim \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot e^{-ik_x x - ik_y y}$$

Введем множитель $\frac{\tilde{E}_0'}{ab}$ для согласования размерности правой и левой

части, величина \tilde{E}_0' затем окажется комплексной амплитудой поля на экране в точке нулевого угла дифракции. И так

$$\begin{aligned} \tilde{E}_P &= \frac{\tilde{E}_0'}{ab} \cdot \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot e^{-ik_x x - ik_y y} = \\ &= \frac{\tilde{E}_0'}{ab} \cdot \int_0^a e^{-ik_x x} dx \cdot \int_0^b e^{-ik_y y} dy = \frac{\tilde{E}_0'}{ab} \cdot \frac{1}{ik_x} (1 - e^{-ik_x a}) \cdot \frac{1}{ik_y} (1 - e^{-ik_y b}) = \end{aligned}$$

$$= \tilde{E}'_0 \cdot \frac{1}{ik_x a} (1 - e^{-ik_x a}) \cdot \frac{1}{ik_y b} (1 - e^{-ik_y b}) = \tilde{E}'_0 \cdot \frac{1 - e^{-2iU_1}}{2iU_1} \cdot \frac{1 - e^{-2iU_2}}{2iU_2},$$

где $U_1 \equiv \frac{1}{2}k_x a$ и $U_2 \equiv \frac{1}{2}k_y b$.

Интенсивность света пропорциональна квадрату комплексной амплитуды

$$I(\alpha) = \frac{\varepsilon_0 c n}{2\mu} |\tilde{E}(\alpha)|^2,$$

В системе СГС Гаусса $I = \frac{cn}{8\pi\mu} |\tilde{E}_P|^2$.

и с учетом $\left| \frac{1 - e^{2iU}}{2iU} \right|^2 = \left(\frac{\sin(U)}{U} \right)^2$, как мы выяснили при рассмотрении

дифракции на одной щели, получим, что интенсивность света в зависимости от

направления дифракции $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ имеет вид:

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(U_1)}{U_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(U_2)}{U_2} \right)^2, \text{ где } U_1 \equiv \frac{1}{2}k_x a \text{ и } U_2 \equiv \frac{1}{2}k_y b, \text{ } a \text{ и } b \text{ —}$$

размеры отверстия по осям x и y .

Факультативно. Дифракция Фраунгофера и фурье-образ амплитудного коэффициента пропускания экрана.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на отверстии произвольной формы в плоском экране.

Для дифракции Фраунгофера на прямоугольном отверстии

$$\tilde{E}_P \sim \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot \tilde{E}_0 e^{-ik_x x - ik_y y}.$$

Аналогично для отверстия произвольной формы

$$\tilde{E}(\vec{k}) \sim \int dx \int dy \cdot \tilde{E}_0 \tilde{\tau}(x, y) \cdot e^{-i(k_x x + k_y y)},$$

где \tilde{E}_0 — амплитуда поля волны перед экраном, $\tilde{\tau}(x, y)$ — комплексный амплитудный коэффициент пропускания экрана в точке с координатами экрана x и y . Здесь, как и раньше, начало координат выбрано в плоскости экрана, в которой лежат оси координат x , y и вектор \vec{r} , поэтому $(\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y$.

Распределение комплексной амплитуды по углам дифракции пропорционально фурье-образу амплитудного коэффициента пропускания экрана

$$\tilde{E}(\vec{k}) \sim \int dx \int dy \cdot \tilde{\tau}(\vec{r}) \cdot e^{-i(k_x x + k_y y)}.$$

**Факультативно. Алгоритм Герчберга — Сакстона
(Gerchberg–Saxton algorithm).**

С помощью этого алгоритма рассчитывают и изготавливают насадки на лазерную указку, чтобы в излучении лазера получить желаемую картинку.

Насадка представляет собой прозрачный экран, который в разных точках экрана дает разный фазовый сдвиг проходящему через экран лазерному излучению. Экран можно изготовить из прозрачной полимерной пленки, например, целлулоидной. Горячей штамповкой или лазерным распылением (нужно взять лазер, излучение которого поглощается пленкой) можно изготовить экран, толщина которого различная в разных точках. Разная толщина обеспечивает разный фазовый сдвиг прошедшего излучения.

Необходимый фазовый сдвиг для получения нужного изображения в излучении лазера с насадкой рассчитывается с помощью алгоритма Герчберга — Сакстона методом последовательных приближений.

Этот циклический алгоритм схематически изображен на нижеследующем рисунке, где в наших обозначениях I нужно заменить на вещественную амплитуду E_0 , а A — на комплексную амплитуду \tilde{E}_0 .

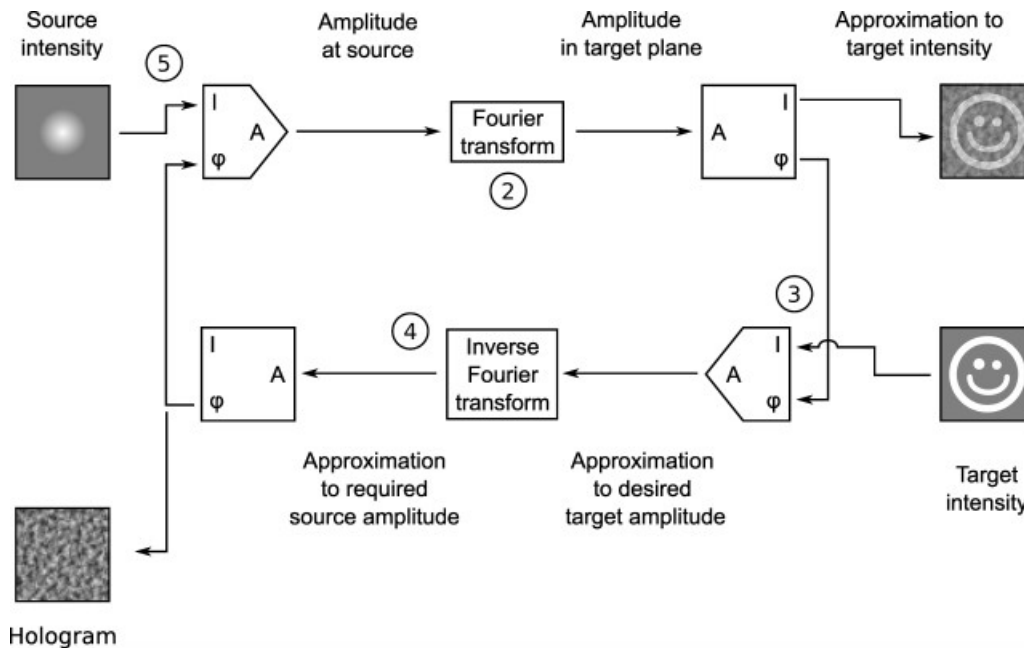


рисунок из Википедии

Будем считать, что излучение лазера — это плоская монохроматическая

волна с гауссовым профилем интенсивности $I = I_0 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}$ в левом верхнем углу рисунка. Получим двумерный фурье-образ распределения амплитуды лазерного излучения — это стадия (2). В получившемся фурье-образе распределение фазы оставим без изменения для дальнейшего использования, а распределение амплитуды заменим на распределение амплитуды в желаемой картинке, стадия (3) на рисунке. Над получившемся двумерным фурье-образом проведем

обратное преобразование Фурье, (4) на рисунке. Будем считать, что распределение фазы в этом обратном преобразовании Фурье — это первое приближение к желаемому распределению фазы прозрачного экрана лазерной насадки. В этом обратном фурье-образе распределение фазы оставим без изменения, а распределение амплитуды заменим на распределение амплитуды лазерного пучка, (5) на рисунке. Далее возьмем двумерное преобразование Фурье от полученного распределения амплитуды и фазы, (2) на рисунке, и так далее.

Алгоритм сходится. После очередного прохода цикла на выходе стадии (2) получается двумерное распределение по углам дифракции, в котором распределение амплитуды все ближе к желаемому изображению, а после стадии (4) получается двумерное распределение, в котором распределение фазы все ближе к оптимальному распределению фазы прозрачного экрана лазерной насадки — своего рода голограммы. На следующем рисунке пример изображения полученного с помощью голограммы рассчитанной по алгоритму Герчберга — Сакстона.



рисунок из Википедии

Яркая точка — лазерный луч, прошедший голограмму без изменения направления.

Экзамен. Принцип Бабине.

Согласно принципу Бабине

$$\tilde{E}_P = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2, \text{ где}$$

\tilde{E}_P — комплексная амплитуда светового поля в точке наблюдения при отсутствии непрозрачного экрана,

\tilde{E}_1 и \tilde{E}_2 — комплексные амплитуды в точке наблюдения для двух дополнительных друг другу непрозрачных экранов.

Пример дополнительных экранов — непрозрачный диск и непрозрачный экран с круглым отверстием того же радиуса что и радиус непрозрачного диска.

Принцип Бабине полностью согласуется с теорией дифракции Кирхгофа, но сама теория неточна.

Поясним соответствие принципа Бабине теории дифракции Кирхгофа.

Рассмотрим три задачи и соответствующие им вторичные источники света в общей для этих задач плоскости экранов.

1). Экранов нет. Вторичные источники находятся на всей плоскости возможных непрозрачных экранов.

2). Непрозрачный экран с круглым отверстием. Вторичные источники находятся в плоскости отверстия.

3). Экран в виде непрозрачного диска. Вторичные источники расположены по всей плоскости снаружи диска.

Вторичные источники 2-ой и 3-ей задач в сумме дают вторичные источники 1-ой задачи. Тогда интеграл Кирхгофа для первой задачи равен сумме интегралов Кирхгофа для второй и третьей задач, что полностью согласуется с принципом Бабинне.

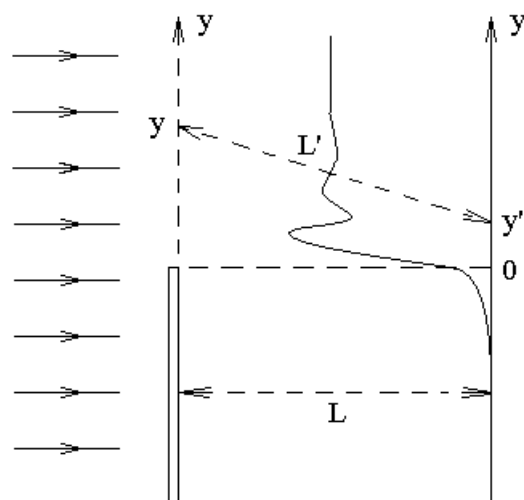
Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны перпендикулярной плоскости экранов. Если экранов нет, то для любого направления, кроме исходного направления волны, света нет. Тогда для дифракции Фраунгофера в любом направлении, кроме исходного направления, получим

$$0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}_2 = -\tilde{E}_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2.$$

Интенсивности дифракционных картин для дополнительных экранов равны для любого направления дифракции, кроме направления исходной световой волны.

Дифракционную картину дифракции Фраунгофера, например, на круглом отверстии в непрозрачном экране можно наблюдать в фокальной плоскости линзы. Пусть диаметр линзы гораздо больше отверстия в экране, тогда для дополнительного экрана в виде непрозрачного диска дифракционная картина такая же плюс яркая точка в фокусе линзы.

Экзамен. Дифракция Френеля на краю экрана. Спираль Корню.



Пусть монохроматическая световая волна распространяется слева направо в направлении оси z . Перпендикулярно направлению волны находится непрозрачный экран в виде бесконечной полуплоскости. На другом экране параллельном первому, находящемся на расстоянии L , наблюдают дифракционную картину. Оба экрана параллельны плоскости x, y . Пусть граница непрозрачной полуплоскости совпадает с осью x . На границе полуплоскости $y = 0$.

Вторичные источники света на открытой полуплоскости мысленно разобьем на полоски с координатой y и шириной δy . Пусть произвольная точка наблюдения имеет координату y' и находится на расстоянии L' от полоски вторичного источника света.

В разные точки экрана y' свет от разных вторичных источников y приходит в разных фазах. Как уже обсуждалось в вопросе дифракция Фраунгофера на одной щели, для вторичных источников света в виде тонких полосок разность фаз пропорциональна разности хода, как и в случае точечных вторичных источников. Тогда

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(L' - L) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{L^2 + (y - y')^2} - L \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(L \sqrt{1 + \left(\frac{y - y'}{L} \right)^2} - L \right)\end{aligned}$$

Будем считать, что $(y - y') \ll L$, так как интуитивно ясно, что интенсивность света на экране в точке с вертикальной координатой y' больше всего зависит от вторичных источников света примерно на той же высоте $y \approx y'$. Тогда

$$\delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left(L \left(1 + \frac{(y - y')^2}{2L^2} \right) - L \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(y - y')^2}{2L} = \frac{\pi(y - y')^2}{\lambda L}$$

Вместо координат y вторичного источника света и координаты y' точки наблюдения введем соответствующие им безразмерные координаты:

$$\begin{cases} \xi = y \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \\ \xi' = y' \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \end{cases}$$

В этих безразмерных координатах запаздывание по фазе зависит от разности координат вторичного источника и точки наблюдения следующим образом:

$$\delta\varphi = \frac{\pi}{2}(\xi - \xi')^2.$$

В теории дифракции Френеля вклад в комплексную амплитуду светового поля в точке наблюдения от вторичных источников полоски шириной $\delta\xi$ пропорционален $e^{i\delta\varphi} d\xi$, если считать, что в интеграле Кирхгофа множитель $\frac{1}{r} = \frac{1}{L'} \approx \frac{1}{L}$ почти постоянен, так как $(y - y') \ll L$. Открыта верхняя полуплоскость вторичных источников ($y > 0$ или $\xi > 0$), следовательно, комплексная амплитуда светового поля в точке наблюдения может быть выражена, как сумма вкладов по всем открытым вторичным источникам света

$$\tilde{E}_P(\xi') \sim \int_0^{+\infty} e^{i\delta\varphi} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}(\xi-\xi')^2} d\xi.$$

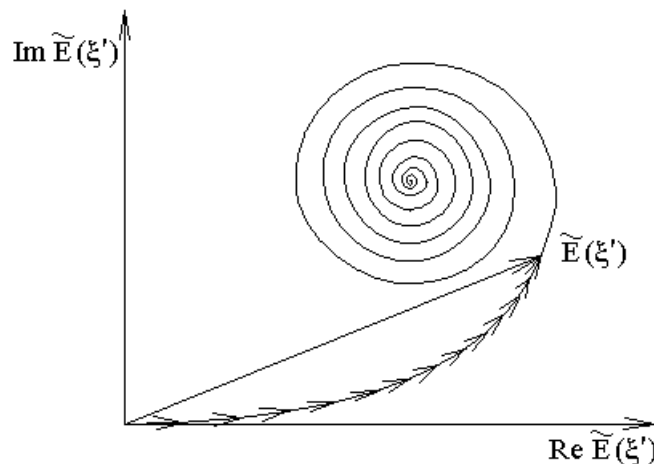
Будем рассматривать комплексную напряженность светового поля \tilde{E}_P тоже в безразмерных координатах, и вместо пропорциональности интегралу будем считать, что она просто равна этому интегралу. Сделаем в интеграле замену переменной интегрирования ξ на $\eta = \xi - \xi'$ и получим

$$\tilde{E}_P(\xi') = \int_{-\xi'}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta.$$

Здесь каждое подынтегральное слагаемое — это маленький вектор на плоскости комплексных амплитуд, который представляет собой вклад от узкой полоски вторичных источников света в комплексную амплитуду в точке наблюдения $\tilde{E}_P(\xi')$.

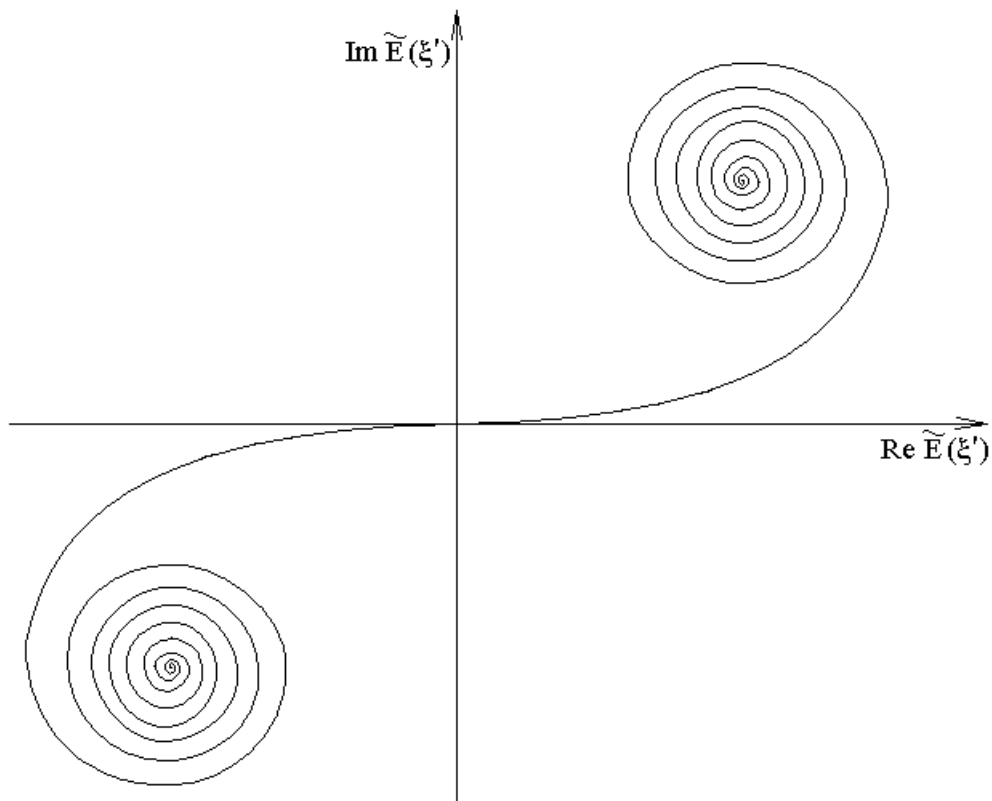
Рассмотрим аналогичный интеграл только с переменным верхним пределом $\tilde{E}(\xi') = \int_0^{\xi'} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$. Тогда $\tilde{E}_P(\xi') = \tilde{E}(+\infty) - \tilde{E}(-\xi')$.

Здесь функцию $\tilde{E}(\xi')$ можно рассматривать, как кривую на комплексной плоскости. Каждому вещественному значению ξ' соответствует точка на комплексной плоскости $\tilde{E}(\xi') = \int_0^{\xi'} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$. Эту точку можно получить, как конечную точку суммы малых векторов на комплексной плоскости, как сумму подынтегральных слагаемых. Все эти векторные слагаемые будут направлены вдоль кривой графика из начала координат в точку $\tilde{E}(\xi')$, соответствующую координате ξ' .

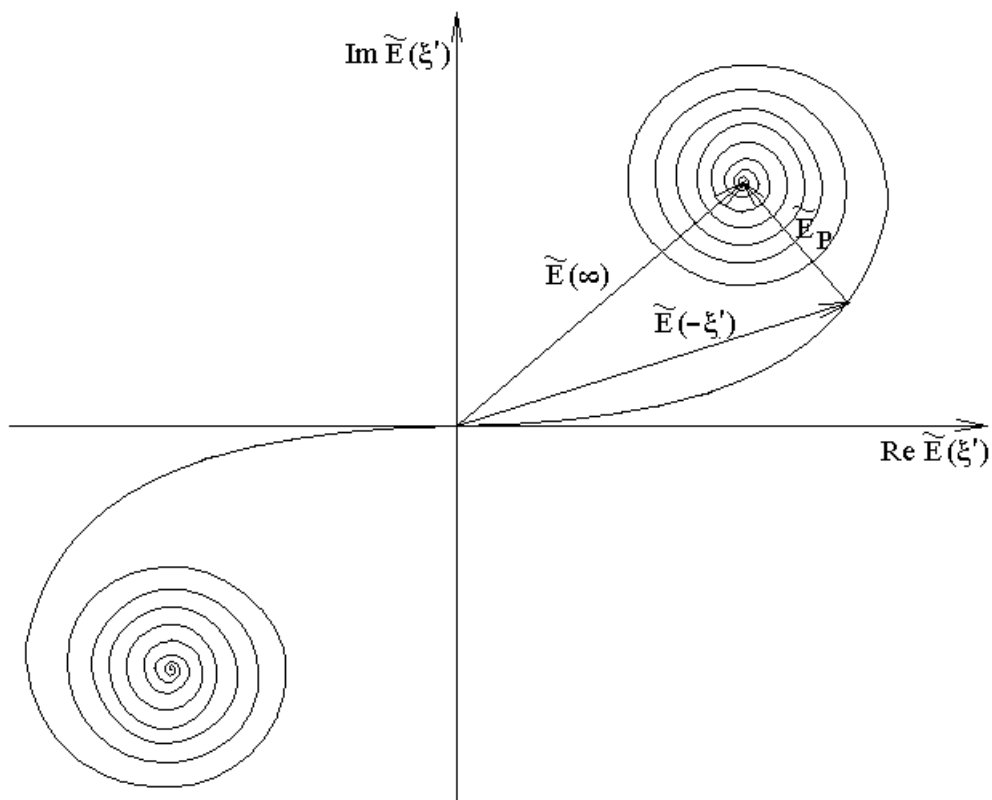


На рисунке представлена только часть кривой, соответствующая положительным значениям ξ' . Каждому отрицательному значению ξ' соответствует $\tilde{E}(\xi')$, отличающееся знаком от $\tilde{E}(\xi')$ с положительным ξ' , так

как для отрицательного ξ' величина $d\eta$ в каждом подынтегральном слагаемом поменяет знак. Соответственно для кривой $\tilde{E}(\xi')$ с отрицательными ξ' получится аналогичный завиток в нижней левой четверти плоскости. Вся кривая представлена на следующем рисунке.

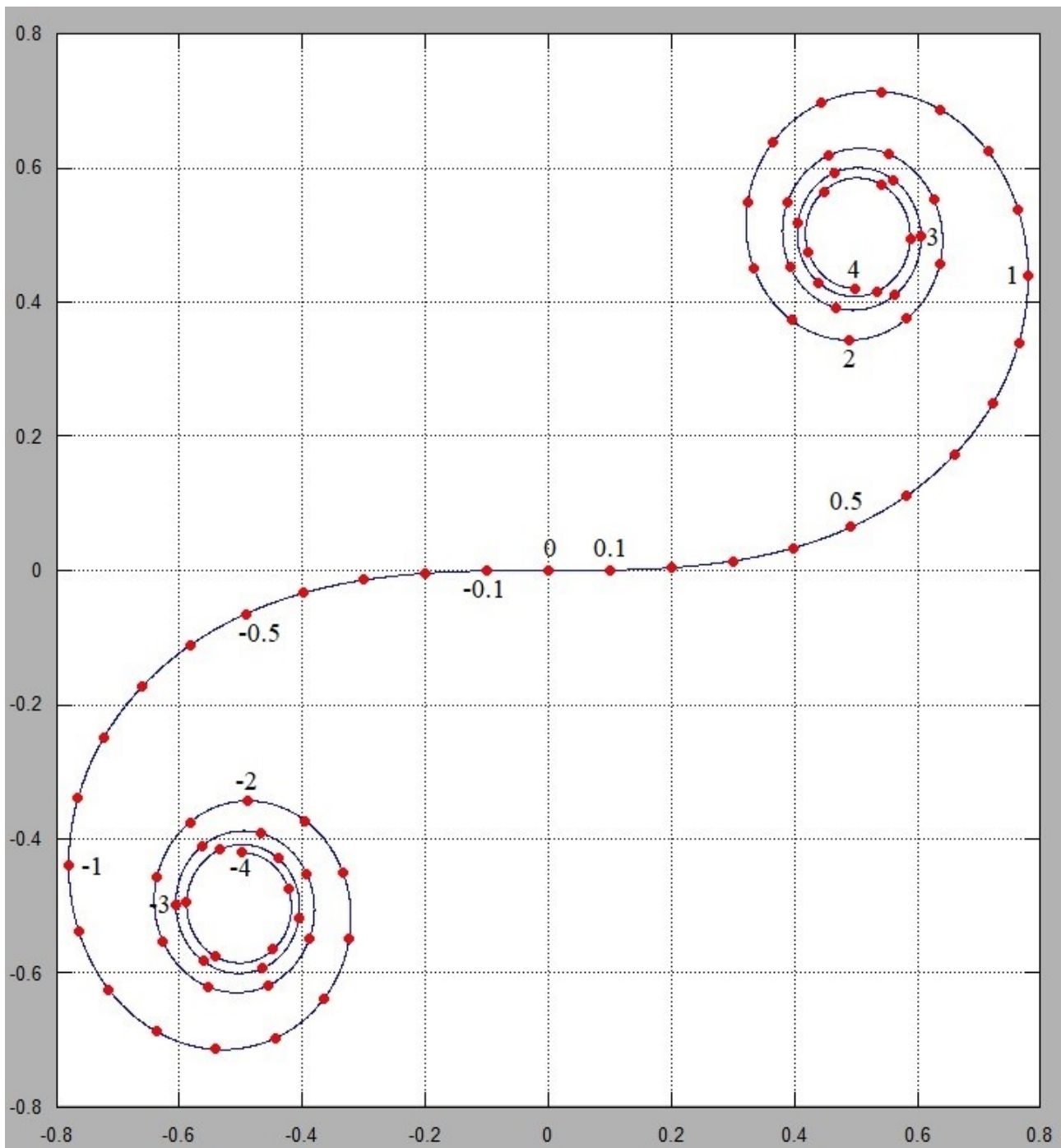


Это так называемая спираль Корню. Как уже отмечалось выше, комплексной амплитуде светового поля $\tilde{E}_P(\xi') = \int_{-\xi'}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta$ соответствует разность $\tilde{E}_P(\xi') = \tilde{E}(+\infty) - \tilde{E}(-\xi')$, например, в области геометрической тени для отрицательного значения y' и соответственно для отрицательного $\xi' = y' \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ получим следующие векторы на кривой Корню.



Вектор, проведенный из центра нижнего левого завитка спирали в центр верхнего правого завитка, равен комплексной амплитуде в точке наблюдения от всех полосок плоскости вторичных источников, то есть комплексной амплитуде излучения без загораживающей часть света экрана.

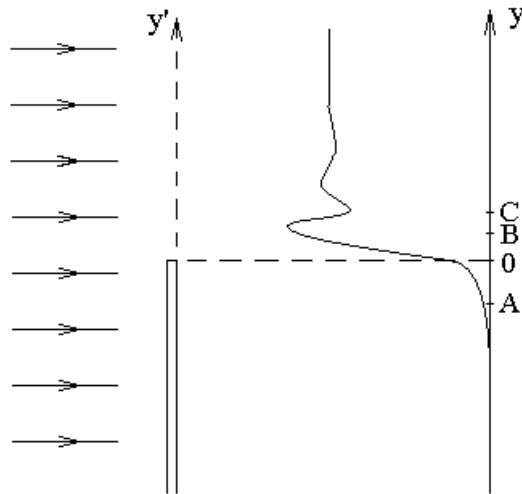
Каждой точке на экране наблюдения дифракционной картины соответствует определенное значение y' -координаты. Этому значению соответствует безразмерная координата $\xi' = y' \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$. Комплексная амплитуда поля \tilde{E}_P в точке с координатой y' равна вектору на спирали Корню из соответствующей точки $\tilde{E}(-\xi')$ в центр правого завитка спирали, как это видно на рисунке сверху. Прямо на спирали Корню обычно отмечены точки с разными значениями ξ' , поэтому можно сказать, что безразмерная комплексная амплитуда равна вектору из точки $-\xi'$ в центр правого завитка.



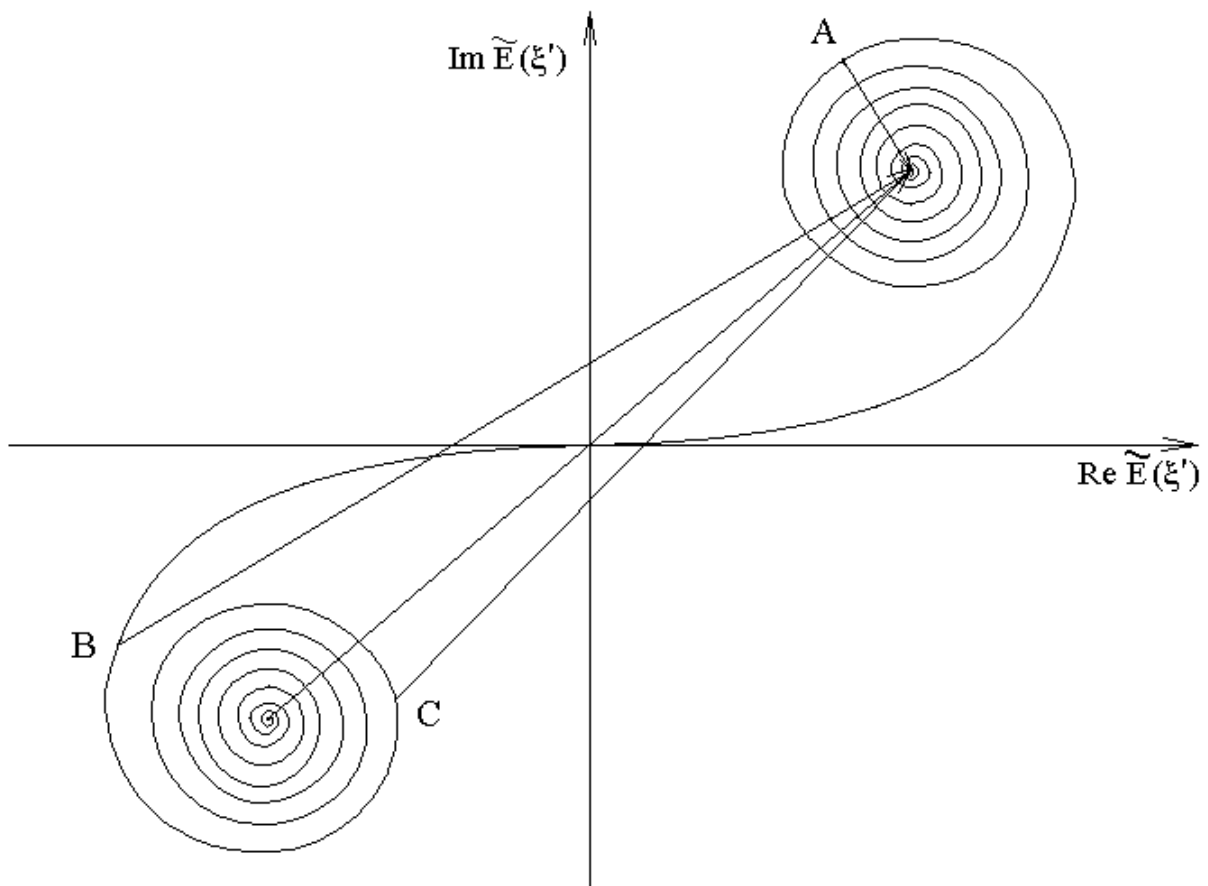
Расчет спирали Корню в Matlab.

Красные точки соответствуют аргументу с шагом 0.1 в диапазоне от -4 до +4.

Рассмотрим картину сложения амплитуд на комплексной плоскости для разных точек экрана: A, B, C



и рассмотрим соответствующие точки на спирали Корню.



Пусть точка A находится в области геометрической тени, следовательно, $y' < 0$, $\xi' = y' \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} < 0$, $-\xi' > 0$. То есть начальная точка $\tilde{E}(-\xi')$ (или просто точка $-\xi'$) вектора комплексной амплитуды лежит в правом завитке спирали Корню.

Другими словами, для рассматриваемой точки A в области геометрической тени нужно учитывать не все вклады правого завитка. Вклады от центральной части правого завитка спирали Корню соответствуют большим

положительным значениям $\eta = \xi - \xi' = (y - y')\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ обязательно присутствуют.

В результате получаем комплексную амплитуду в виде вектора из некоторой точки A в том же правом завитке в центр правого завитка спирали Корню.

Из спирали Корню видно, что при смещении точки наблюдения A в область геометрической тени (ближе к центру правого завитка спирали Корню) амплитуда света, как и интенсивность, монотонно убывает.

Для точки B , находящейся выше геометрической границы света и тени, появляются вклады $(y - y') < 0$, соответствующие левой части спирали Корню вблизи начала координат на рисунке со спиралью Корню.

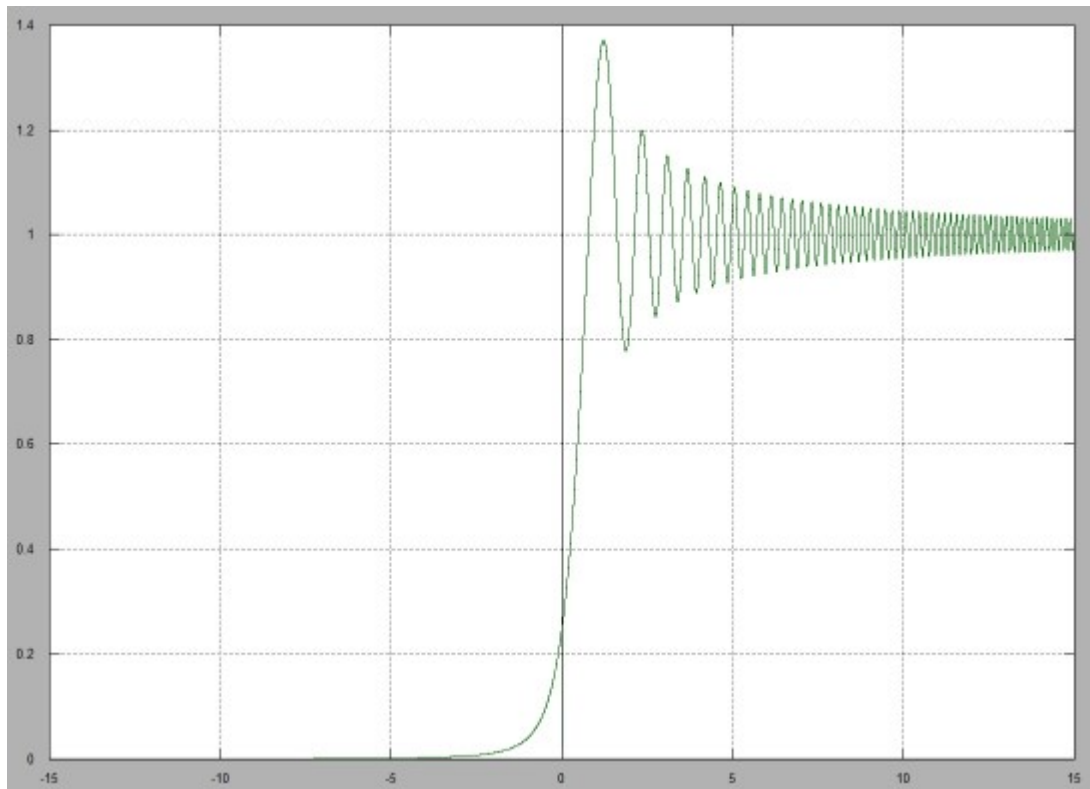
Из рисунка спирали Корню видно, что при движении от точки A к точке B и соответственно при движении вверх по экрану от границы геометрической тени амплитуда и интенсивность возрастают монотонно.

При дальнейшем движении вверх по экрану от точки B к точке C интенсивность света сначала чуть возрастает, а затем убывает. Это видно из рисунка со спиралью Корню, на котором вектор \overline{CO} комплексной амплитуды света для точки C короче вектора \overline{BO} комплексной амплитуды для точки B . Точка O — центр правого завитка спирали Корню. Далее амплитуда света и интенсивность снова возрастают, затем снова убывают и т. д.

В освещенной области экрана интенсивность света осциллирует при удалении от границы геометрической тени.

На границе света и тени амплитуда равна половине всей амплитуды падающей волны, а интенсивность, соответственно, равна четверти всей интенсивности.

Пространственный период осцилляций интенсивности на экране имеет порядок величины $\sqrt{\lambda L}$.



Интенсивность дифракции на краю плоского непрозрачного экрана в зависимости от вертикальной координаты в единицах $\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ (расчет в Matlab).