Функционально-разностные уравнения и собственные функции оператора Шредингера с сингулярным $\delta'-$взаимодействием на круговой конической поверхности

Модельные задачи для лапласиана с сингулярным потенциалом, носитель которых находится на гиперповерхностях, возникают в квантовой физике (атомные гамильтонианы в сильном однородном магнитном поле), в квантовой оптике и акустике (фотонные кристаллы с высоким контрастом), а также при рассеянии классических акустических или электромагнитных волн на полупрозрачных поверхностях. Традиционно спектр лапласиана с сингулярным потенциалом изучается в рамках общих методов для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. В частности, это требует дополнительные средства исследования, включая расщепление оператора и неполное разделение переменных. Однако если необходимо выяснить более подробную информацию о поведении собственных функций, вычислить их асимптотику и с этой целью получить полезные интегральные представления, то это обычно возможно только для некоторых частных случаев, например, для модельных задач с симметрией. В нашей задаче это осевая симметрия кругового конуса. Однако, даже в этом случае описание асимптотического поведения собственных функций остается громоздким и требует применения специальных подходов.

Соответствующий самосопряженный оператор, условно обозначаемый $A_\gamma := -\triangle - \gamma\delta'_{\mathcal{C}}$, однозначно задается с помощью плотно определенной полуограниченной полуторалинейной формы, которая замыкаема в гильбертовом пространстве. В классической формулировке дифференциальное уравнение Шредингера со спектральным параметром E дополняется граничными условиями, состоящими из двух соотношений, которые являются условием непрерывности нормальной производной решения на конической границе C и условием типа Робэна на C, связывающим нормальную производную с скачком неизвестного решения на границе. Положительная константа $\gamma > 0$ является заданным параметром Робэна в этом граничном условии.

Фактически, уравнение для собственных функций U оператора A_γ можно формально записать как

$$A_\gamma U \,=\, E U\,,$$

где E - спектральный параметр. Мы изучаем отрицательный спектр ($E < 0$) оператора. Спектр оператора A_γ состоит из существенного (непрерывного) спектра $\sigma_{ess}(A_\gamma) = [-4\gamma^2, \infty)$ и бесконечной дискретной части $\sigma_d(A_\gamma)$, принадлежащей интервалу $(-\infty, -4\gamma^2)$, который накапливается к концу $-4\gamma^2$ существенного спектра.

Мы используем интегральное представление Конторовича-Лебедева (КЛ) для решения спектральной задачи, отделяя радиальную и угловые переменные. Неизвестная функция в подынтегральном выражении решает задачу для оператора Лапласа-Бельтрами на единичной сфере. С помощью дальнейшего разделения угловых переменных неизвестная функция в подынтегральном выражении представляется как произведение сферических функций и решения некоторого однородного функционально-разностного уравнения второго порядка с мероморфным потенциалом, зависящим от спектрального параметра E. Анализ этого уравнения играет решающую роль для построения собственных функций и их асимптотики. Полученное функционально-разностное уравнение может быть эффективно изучено путем сведения к интегральному уравнению. Соответствующий интегральный оператор ограничен и самосопряжен, его спектр непосредственно связан со спектром A_γ и может быть эффективно описан.

Интегральное представление КЛ для собственных функций преобразуется к интегралу типа Зоммерфельда, так как интеграл Зоммерфельда хорошо приспособлен для применения метода перевала и асимптотической оценке. Оказывается, что главные особенности подынтегрального выражения в интеграле Зоммерфельда могут быть эффективно описаны. Для некоторых направлений именно эти особенности отвечают за ведущие члены асимптотики собственных функций. Однако, для других направлений особенности могут быть близки к седловым точкам интеграла Зоммерфельда, что соответствует некоторым угловым окрестностям так называемых сингулярных направлений. В этом случае асимптотика имеет более сложный вид и описывается с помощью специальной функции, родственной функции параболического цилиндра (функции Вебера). Фактически эта специальная функция отвечает за переключение асимптотических режимов, а именно, переключению с одной скорости затухания собственной функции для некоторых угловых направлений, к другой скорости, соответствующей дополнительному диапазону углов.

Lyalinov M.A. 2020, Functional difference equations and eigenfunctions of a Schrödinger operator with δ'-interaction on a circular conical surface. Proc. R. Soc. A 476: 20200179. http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2020.0179