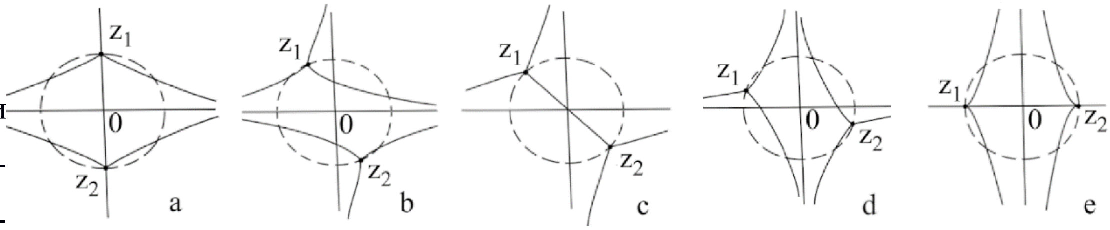
Квазиклассическая асимптотика матриц перехода для разностных уравнений с двумя близкими точками поворота

Александр Федотов, Кафедра Высшей математики и математической физики

Изучается разностное уравнение Шредингера $\psi(x+h)+\psi(x-h)+v(x)\psi(x)=E\psi(x)$, (1) где x – вещественная переменная, v – аналитическая функция, E – спектральный параметр, а h – малый параметр, играющий роль постоянной Планка. Уравнение (1) возникает в современной физике. Так, уравнение с $v(z)=2\cos z$ – ближайший родственник знаменитого уравнения почти-Матье – возникает при исследовании блоховского электрона в кристалле в магнитном поле. Наиболее детально геометрия его спектра изучена в квазиклассическом приближении. Пусть h иррационально. Спектр расположен на малых интервалах на отрезке [-4,4]. Около E=0 они длиннее, и там сосредоточена большая часть спектра. Пусть I – один из этих интервалов. Спектр на I похож на весь спектр, расположен на малых по сравнению с I подынтервалах и большая его часть сосредоточена около некоторой точки. На каждом из подынтервалов I спектр расположен на меньших подынтервалах и так далее. Существует бесконечно много точек накопления спектра. Свойства спектра вблизи них определяют его глобальные геометрические характеристики. Один из основных объектов квазиклассического анализа уравнения (1) – импульс p – аналитическая функция, определяемая символом уравнения: $\cos p+\cos x= E/2$. Ее точки ветвления удовлетворяют уравнениям $\pm1+\cos x=E/2$ и играют ту же роль, что и точки поворота для дифференциальных уравнений. Для $v(x)=2\cos z$ оказывается, что вблизи каждой точки накопления, спектра описывается уравнением с близкими точками поворота. Так, при малом E рядом с каждым x, целочисленно кратным π есть две близкие точки поворота. Исследование решений (1) около близких точек поворота – очень сложная задача из-за нелокальности уравнения. Но в задачах об исследовании спектра важно поведение решений на бесконечности, и достаточно знать матрицу перехода T, связывающую решения с простым асимптотическим поведением слева от точек поворота с решениями, имеюшими простое поведение справа от них. Предложен принципиально новый путь к вычислению T без изучения решений около близких точек поворота. Пусть точки поворота сливаются при E=E0. Для комплексных E на окружности $|E- E0|=r$ они оказываются отделены друг от друга на расстояние порядка $r^{1/2}$, и поэтому при малом h удается вычислить асимптотики матрицы перехода, связывающей аналитические решения (1), определенные при комплексных x и E. Аналитичность по x нужна, чтобы пройти «между токами поворота» по комплексной кривой. Асимптотики T внутри окружности $|E-E0|=\varepsilon$ восстанавливаются с помощью методов комплексного анализа без исследования решений при E≈E0. При этом важную роль играет описание нулей элементов T. Оказывается, что у диагональных элементов нет нулей, и их асимптотика на окружности просто сохраняется внутри нее. Нули антидиагональных элементов описываются условиями квантования, которые определяют спецфункцию – Гамма-функцию Эйлера, описывающую эти элементы внутри окружности. Главное достижение работы – новый асимптотический метод, применимый для широкого круга задач разной природы (дифференциальное уравнение Шредингера, дифференциальное уравнение Шредингера с периодическим потенциалом и адиабатическим возмущением и т.д.). Кроме того, для (1) впервые получены асимптотики матриц перехода, важные для приложений.



Точки поворота и линии Стокса для |E-E0|=r, -π≤arg (E-E0)≤0.

Работа будет опубликована в Russian journal of math. physics, том 29, № 4 , 2022, 451–478. Поддержана грантом РФФИ No 20-01-00451.